物理学教科書シリーズ

一般相対論

佐々木 節

産業図書

はじめに

一般相対論は時空の幾何学として重力の法則を与える理論である．時空の幾何学としての重力理論は一般相対論が唯一ではないが，最も簡潔な理論である．ところがアインシュタインが一般相対論を完成してから既に80年が経過し，その間に我々の物質観，時空観，宇宙観は大きく変貌したにもかかわらず，未だに一般相対論からのずれは実験的にまったく検出されていない．これは非常に驚くべきことである．それどころか，近年の宇宙観測においては一般相対論を考慮しなくては理解できない様々な現象がますます増えており，一般相対論はいまや宇宙物理学における一つの大きな柱といっても過言ではない．

一方ミクロの物理学の方へ目を転じると，特殊相対論と量子力学が融合して発展した素粒子理論においても，最近は重力を含めた統一的相互作用の理論の構築が大きな課題である．そこでは時空の幾何学としてすべての相互作用を統一する方向に理論が発展しており，一般相対論はその基礎的出発点として熟知しておくべき重要な要素となっている．

こうした状況を反映してか，最近は一般相対論に関する教科書，参考書が数多く出版されている．そこにあえて本書を出版する意義があるか，と問われるとなかなか答え辛いものがある．その一方，80年の歴史の中で一般相対論の様々な側面が明らかにされるとともに，一般相対論の捉え方も百人百様になってきている．そうした様々な捉え方が存在することを思えば，本書が他書と異なる新たな視点を提供することも可能ではないかと少々自己満足的ではあるが期待している．

本書では，一般相対論を初めて学ぶ人を念頭にその基本的事項をなるべく丁寧に解説したつもりである．しかし，一般相対論の基礎となる物理の基礎理論についての解説はほとんど省いた．大学の理系学部のカリキュラムに従えば，特

殊相対論，電磁気学，解析力学等を履修していることを前提としている．特に特殊相対論に関しては自分できちんと勉強しておいてほしい．なお各章末に少数の練習問題を与えた．一般相対論の理解を深めるためにも，一度は独力で解いてみることを勧める．

草稿の段階で数々の貴重な意見を下さった京都大学理学部天体核研究室の皆様，特に椎野克，田中貴浩の両氏には心から感謝します．

1995 年 11 月

佐々木 節

目　　次

1　歴史的概観

一般相対論には，重力を表す理論という力学的側面と，自然界の物理法則が満たすべき基本的枠組みという側面とがある．前者は重力を時空の平坦さからのずれ方として表す物理法則，後者は物理法則が時空を張る座標系の取り方によらないという一般座標変換に対する共変性である．そしてこれらがリーマン幾何学によって統一的に表現されるのであるが，実はこの二つの側面は，既にニュートン力学において万有引力の法則と運動の第二法則，そしてそれらを結び付ける等価原理，という形で現れている．そこで初めにまず，物理としての重力の法則と一般座標共変性がどのように結び付き，一般相対論が成立してきたかの歴史過程を概観しよう．

1.1　ガリレイの相対性原理

近代物理学は，17 世紀にガリレイが物体の運動に関する運動の相対性に気がついた時点から始まるといってよい．つまり，

(1) 互いに等速直線運動をしている二つの系（慣性系）において，物理法則は同一である．

というガリレイの相対性原理である．しかし，ガリレイはこの原理を表現する数学的手段をもっていなかった．それを行ったのは 17 世紀後半になって現れたニュートンである．ニュートンは微分積分学を構築するとともに，運動の法則を (1) の原理の下に数式で表した．そのために，ニュートンは何物にも影響を受けずにすべての系に共通に均一に流れる時間と一様で不変不動の空間，いわゆる絶対時間空間（絶対時空）の概念を導入した．すなわち，時空を時間を表す

数直線と3次元ユークリッド空間によって数学的に表現し，物体（質点）の運動を時刻 t の関数としてその空間的座標 $\vec{x} = \{x^i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ で表した．そして，物体は外部から力が働かない限り等速直線運動をし続け（運動の第一法則，すなわち慣性の法則），物体の加速度 $\vec{a} = d^2\vec{x}/dt^2$ は与えられた外力 $\vec{F}$ に比例するが，その大きさは物体の慣性の大きさに反比例する，という有名な運動の第二法則を与えた．この物体固有の慣性の大きさを定量化した概念が慣性質量であり，それを m_I とすると

$$m_I \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}\,, \tag{1.1}$$

である．この式から明らかに，物体を任意の速度 v^i で等速直線運動している系から見ても外力が同じならば同じ加速度を観測することがわかる．いい換えると，ニュートンの運動の第二法則は

$$\begin{aligned} &t \to t' = t, \\ &\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t, \end{aligned} \tag{1.2}$$

という変換に対して不変である．この変換をガリレイ変換という．ちなみにガリレイ変換不変性がユークリッド空間の性質の一つの反映である，という点に注意しておこう．ユークリッド空間での2点間の距離 ℓ は

$$\ell^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_1^i - x_2^i)^2, \tag{1.3}$$

で与えられるが，ガリレイ変換はこの距離を不変に保つ座標変換の一つとなっている．

ニュートンはこのように物理法則が満たすべき原理を数学的に定式化したが，それだけに留まらず，重力が従う法則も明らかにした．よく知られている万有引力の $1/r^2$ 法則であり，そこで最も重要な役割を果たすのが等価原理である．すなわち，座標 $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$ にある質点 A, B に関して，質点 A に働く力 $\vec{F}_A$ は G を普遍定数として

$$\vec{F}_A = -Gm_{G,A}m_{G,B}\frac{\vec{x}_A - \vec{x}_B}{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|^3}\,, \tag{1.4}$$

で与えられる．ここで現れる $m_{G,A}$, $m_{G,B}$ をそれぞれ質点 A, B の重力質量と呼ぶ．そしてこの物体の「重さ」を表す重力質量 m_G と,「慣性の大きさ」を表す慣性質量 m_I の比がすべての物体に対して同一である，という等価原理である：

$$\frac{m_{G,A}}{m_{I,A}} = \frac{m_{G,B}}{m_{I,B}} = \cdots = \text{一定}. \tag{1.5}$$

そこで，通常はこの比を1と規格化して重力質量 m_G と慣性質量 m_I を同一視し単に質量 m $(= m_G = m_I)$ と呼ぶが，しばらくはこの二つを区別して議論を進めよう．

ニュートンの重力理論のもう一つの重要な点は，物理法則に「場」の概念を導入したことである．すなわち，座標 $\vec{r} = \vec{r}_A$ にある質量 $m_{G,A}$ の質点は，そのまわりに重力ポテンシャル

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{G\, m_{G,A}}{|\vec{r} - \vec{r}_A|}, \tag{1.6}$$

で与えられる重力場を作り，質点同士が互いに直接接していなくても，場による力が離れた地点に及ぶことである．

現在でも身近なほとんどの物理現象がニュートン力学で説明されていることからもわかるように，ニュートン力学はその後大きな成功を納めた．しかし，19世紀になり自然科学が大きな発展を遂げ始めると，ニュートン力学では説明しきれない現象が次第に明らかになった．すなわち電磁気現象である．19世紀の半ば，マックスウェルはそれまでに明らかになっていた電磁気現象に関する法則を統一的に記述する方程式，マックスウェル方程式を導出した．マックスウェルの電磁気学の理論は重力と同様やはり場の理論である．ところが，この方程式はガリレイ変換に対して不変ではなかった．マックスウェル方程式の正しさはその後のあらゆる実験でますます確立していったが，それが確立すればするほどニュートン力学との矛盾が次第に鮮明になってきたのである．その矛盾は1887年，マイケルソンとモーレイによる実験により，電磁波の伝播速度 c が慣性系によらず一定であることが示され頂点に達した．ガリレイ変換不変性が普遍的な原理であるならば，静止系で発した電磁波の速度とそれに対して速度 $\vec{v}$ で運動する系では，その速度の分だけ伝播速度が速くなったり遅くなったりするはずなのに，実際は常に一定の速さで伝わることが示されたのである．

1.2　特殊相対性原理

1905 年，アインシュタインはニュートン力学とマックスウェル方程式との矛盾を解決し，物理法則が実はガリレイの相対性原理ではなく，マックスウェル方程式が内包していた，より高度な相対性をもっていることを示した．アインシュタインの特殊相対性原理である．この原理は，

(1) 物理法則はすべての慣性系において同一である．

(2) 真空中を伝播する光の速さはすべての慣性系において同一である．

の二つからなる．(1) はガリレイの相対性原理とまったく同じであるが，(2) の光速一定の原理が，マイケルソン-モーレイの実験によって示唆されていたにもかかわらず，それまでの誰もが考えもつかなかった点である．なぜなら，ニュートンが前提とした絶対時空のもとではそれはありえないことだからである．しかしアインシュタインは絶対時空の概念をあっさりと捨て，それに代わる新しい時空概念を導入した．すなわち時間も空間同様慣性系が異なれば異なる進み方をする相対的な概念とし，光速 c は日常使う時間の単位と空間の単位とを結び付ける単なる換算係数であるとした．

このアインシュタインの特殊相対性原理を表現する空間が 4 次元ミンコフスキー時空である．この 4 次元時空上の点を世界点と呼ぶ．いま，時空の座標を (t, x, y, z) とするとその上での二つの世界点 A, B 間の 4 次元的距離は

$$s_{AB}^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2, \quad (1.7)$$

で定義される．3 次元ユークリッド空間との違いは，時間が含まれていることと距離に対する時間の寄与が空間からの寄与とは符号が反対である，という点である．そのため s_{AB}^2 は正定値ではない．そして，ユークリッド空間でのガリレイ変換に対応するのが，ミンコフスキー時空でのローレンツ変換である．簡単のために静止系 (t, x, y, z) から x-座標の正の方向に速度 v で運動する慣性系 (t', x', y', z') に移る場合を考えると

$$t \to t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

$$x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$
$$y \to y' = y,$$
$$z \to z' = z, \tag{1.8}$$

となる．直接確かめられるように，この座標変換（慣性系の変換）でミンコフスキー時空の任意の 2 点間の距離 (1.7) 式は不変に保たれる．そこで，この距離のことを 4 次元時空の不変距離という．また，この変換式で $c \to \infty$ の極限をとるとガリレイ変換に還元する．これからわかるように，ガリレイ変換は慣性系同士の速度差が光速に比べて十分小さいときのローレンツ変換だったわけである．マックスウェル方程式はこのローレンツ変換に対する不変性をもっていた．また，運動の第二法則は 4 次元時空上の物体の世界点に対する運動方程式，

$$m_I \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu, \tag{1.9}$$

へと拡張された．ここで，$x^\mu = (ct, x, y, z)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ であり τ は質点とともに運動する系（質点の静止系）で測った時間，固有時間である（3.1 節参照）．

1.3　一般相対性原理

特殊相対性原理はこのように 19 世紀に完成した新しい力の法則，電磁気学を矛盾なく説明する原理として成功したのであるが，それと引き換えにニュートンの重力理論はそのままでは成立しなくなった．重力の理論を特殊相対性原理と矛盾なく拡張する必要性が出てきたのである．

重力が他の力の法則と大きく異なるユニークな特徴は等価原理にある．よく引用される例として，自由落下するエレベーターの中にいる慣性質量 m_I，重力質量 m_G の観測者と，それを地上で見ている観測者を考えてみよう．地球の重力場による地表面上の重力加速度を g とすると，地上の観測者から見れば自分は重力と地表面からの抗力が釣り合って静止した慣性系におり，このエレベーターが下向きに重力 $F_G = m_G g$ を受けて加速度 $a = F_G/m_I = (m_G/m_I)g$ で運動しているように見える（図 1.1）．ところが，エレベーター内部の観測者はまったく重力を感ぜず無重力状態で静止している，すなわち慣性系にいると思

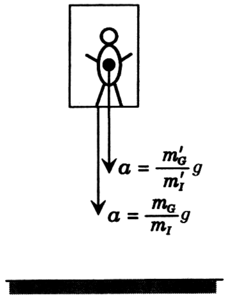


図 1.1

うであろう．これは，等価原理 $m_G = m_I$ が任意の物質に対して成り立っているためである．そしてエレベーター内の観測者から見ると，地上の観測者は地表面からの抗力を受けて加速度運動する非慣性系にいると考えるであろう．このように重力は観測者によって存在したりしなかったりする不思議な性質をもっており，そのために慣性系の概念が曖昧になってしまうのである．

アインシュタインはこうした重力に付随する問題点の考察の結果，質点に働く局所的な力の概念として重力を捉えることを放棄するとともに，慣性系の概念を時空の小さな領域にも適用できるよう局所化すればよいことに気づいた．上の例でいうと，地上の観測者の系には，地表面からの抗力以外には局所的な力が加わっていないから，慣性系と見なすことを放棄する．一方エレベーター内部の観測者の系は時空全体にわたる大局的な慣性系ではないが，局所的な力は何も加わっていないから，エレベーター内という領域に限って慣性系と見なす．この時空の局所的領域での慣性系（自由落下系）を局所慣性系という．そして1915 年，アインシュタインは局所慣性系にまで物理法則の不変性を要求した一般相対性原理を提唱した．一般相対性原理は

(1) 物理法則はすべての**局所慣性系**で同一である．

(2) 真空中を伝播する光の速さはすべての**局所慣性系**において同一である．

からなる．特殊相対性原理と比べてわかるように，違いは慣性系を局所化した点のみである．しかしそれは，時空を物理現象を記述する単なる入れ物から，彎曲したり伸縮したりする動的な物理的対象にする非常に大きなステップであった．

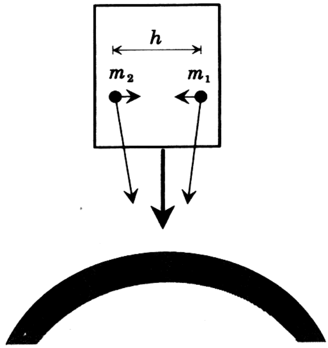


図 1.2

もう一度エレベーターの例に戻って考えよう．重力は確かに局所的には（時空の 1 点においては）消せる．これは重力が電磁気力のように局所的に不変な形で場として定義されないことを意味する．しかし，エレベーターといえども実際には有限の大きさをもっている．図 1.2 に示してあるように，エレベーター内で空間的に離れて静止した 2 質点は，エレベーターの落下とともにそれぞれともに地球の中心へ向かって落下する．その結果，2 質点間の距離 h は時間とともに減少する．これをエレベーター内の観測者の立場で見ると，2 質点が互いに近づく方向に力を受けているように観測される．これは，重力が有限の大きさをもつ物体に働くときに現れる潮汐力であり，その名のとおり潮の干満現象を起こす原因となっている．この例からわかるように，重力は局所的には消せるが，有限の空間的広がりを考えると決して消すことができない．これは，重力場が空間の広がりに付随した時空自身の性質として解釈されるべきことを示唆している．例えば地球の表面は局所的には平面と区別できないが，大きな広がりの中で考えると決して平面では記述できない球面である．すなわち，重力場とは時空間の曲がり具合，曲率と考えるのが自然なのである．

こうして，アインシュタインは重力を時空の曲率として捉え，一般相対性原理を満たす重力理論を，時空内の物質分布によって時空の曲率が決まり，その曲率に従って物質の運動が決定される，という形で定式化した．これが一般相対論である．そして，その定式化の基礎となる曲がった時空を記述する数学的手法がリーマン幾何学である．

2　計量と曲率

この章では，一般相対論の数学的準備として，曲がった空間を記述するリーマン幾何学の基本的な内容について述べる．なお，無用の繁雑さを避けるためこの章では通常の意味での空間を仮定するが，議論の内容はすべてそのまま（わずかな自明な変更を除いて）時空の場合にも当てはまる．また，数学的厳密さは追求しないので，それに興味がある読者は別に数学書等を参照してほしい．

2.1　空間の計量

第 1 章で述べたように，重力は時空の曲がり方として表現されるが，等価原理によりその時空は局所的には平坦でなければならない．すなわち，数学的に重力を表すには滑らかな曲がった空間が必要である．このような空間を多様体（正確には可微分多様体；differentiable manifold）という．n 次元多様体 M^n は局所的に n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ と同相な空間である．よって多様体上の任意の点 P の近傍 U でそれを覆う滑らかな座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ が存在する．これを多様体上の局所座標系という．以下でこの局所座標系のことを単に座標系と呼ぶ．また，平坦な空間がそうであるように多様体上に距離が定義さ

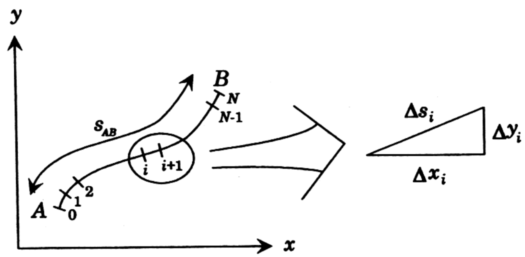


図 2.1

れなければならない．この距離を測る基本的幾何学量が計量である．以下では多様体上に計量が定義された空間を単に空間と呼ぶ．

簡単のため，平坦な 2 次元空間（2 次元平面）上で，図 2.1 に与えたような 2 点 A, B を結ぶ曲線の長さ s_{AB} を考えよう．平面上のデカルト座標を (x, y) とすると，長さ s_{AB} はその曲線を細かく N 分割してそれぞれの部分を直線で近似した長さの和を取り，最後に $N \to \infty$ の極限を取ってやれば求まる．すなわち，

$$s_{AB} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta s_i = \int_A^B ds\,; \quad \Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\,.$$

ここで $N \to \infty$ での Δs を ds と書けば，明らかに

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

である．これは 2 次元平面上の無限小離れた 2 点間の距離を与えており，2 次元平面の線素 (line element) という．同様に平坦な n 次元空間の線素がデカルト座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ に対して

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j \ (= \delta_{ij} dx^i dx^j), \tag{2.1}$$

となることは自明であろう．ここで δ_{ij} は添字 i, j が等しいときにのみ 1 で他は 0 となるクロネッカーの記号である．また，括弧内に示したように，以後上下に繰り返し現れる同じ添字に関しては特に断らない限り和をとる規則に従う．これを一般の曲がった n 次元空間に拡張すれば，線素は一般に

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，g_{ij} は添字 i, j に関して対称 $(g_{ij} = g_{ji})$ で，非縮退 $(\det g_{ij} \neq 0)$ であり，一般には場所の関数 $(g_{ij} = g_{ij}(x))$ である[1]．この g_{ij} のことを計量テンソル (metric tensor)，または単に計量という．

---

[1] ここで g_{ij} の引数を x^k と書く代わりに，簡単のため x とした．以後も特に必要な場合以外同様とする．

ところで，空間が曲がっているかどうかは g_{ij} の形だけではわからないことに注意する必要がある．例えば 2 次元平面の場合，直交座標 (x, y) の代わりに $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ によって極座標 (r, φ) で考えてみよう．このとき，x, y のそれぞれの全微分を取ると，

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

より，

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

となり，$g_{ij} = \delta_{ij}$ ではなくなる．逆に真に曲がった空間に対しても，局所的には平坦であるから，空間の十分に狭い領域では $g_{ij} = \delta_{ij}$ となるように座標を取ることができる．この事実の時空上での物理的帰結が等価原理である（3.2 節参照）．

2.2　テンソル代数

前節で取り上げた計量テンソル $g_{ij}(x)$ のように，空間の座標に付随した添字を複数もつ幾何学的対象を一般にテンソルという．添字が一つしかないベクトル $v^i(x)$ もテンソルの特殊な例である．また，添字のないものをスカラーという．任意のスカラー $f(x)$ は，座標変換によってその値は不変に保たれるが，テンソルは計量テンソル g_{ij} の例でもわかるように，その各成分の値そのものは座標によっていくらでも変わってしまう．そこで，座標変換によってその値がどのように変換されるか，あるいは座標によらない不変な性質は何かという点が問題となる．この節ではテンソルを座標によらない幾何学量としてもう少し正確に定義し，その基本的性質と規則について述べる．

(a)　共変テンソルと反変テンソル

まず多様体上のベクトルの定義から始めよう．n 次元多様体 M^n 上で実数値をもつ滑らかな関数 f を考える．いまこの多様体上に座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を張ると，f はその座標の関数 $f(x)$ と等価である．いま M^n 上に実数 t をパラ

メーターとする 1 パラメーター曲線 $C(t)$ を考えると，曲線 $C(t)$ は座標によって $x^i = x^i(t)$ で表される．このとき，曲線 $C(t)$ 上での関数 f の値 $f(x(t))$ からその t に関する微分への線形写像，

$$\overrightarrow{V} : f \rightarrow \overrightarrow{V}(f) = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}, \tag{2.3}$$

を曲線 $C(t)$ の接ベクトル (tangent vector) という．関数 f は任意であるから接ベクトル $\overrightarrow{V}$ は dx^i/dt を成分として

$$\overrightarrow{V} = V^i \overrightarrow{e}_i = \frac{dx^i}{dt}\overrightarrow{e}_i, \tag{2.4}$$

と表せる．ここで $\overrightarrow{e}_i$ は座標系 $\{x^i\}$ に対する基底ベクトルで任意の関数 f に対して

$$\overrightarrow{e}_i(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}f(x), \tag{2.5}$$

と作用する．よってベクトルを微分演算子と見た場合 $\overrightarrow{e}_i = (\partial/\partial x^i)$ に等しい．これを座標基底という．一方通常の線形代数的記号法に従えば座標基底 $\overrightarrow{e}_i$ は

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \overrightarrow{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

と表現される．$\overrightarrow{V}$ が直観的な接ベクトルの概念に一致していることは明らかであろう．$\overrightarrow{e}_i$ で張られる線形空間を接ベクトル空間 (tangent vector space) といい $T(M^n)$ で表す．

接ベクトル空間の基底として必ずしも座標基底を取る必要はない．一般に基底ベクトル $\overrightarrow{e}_i$ に対応する微分演算子が，適当な座標を選ぶことによって単なる偏微分 $(\partial/\partial x^i)$ で表される場合を座標基底，そのような座標が存在しない場合を非座標基底という．後に 3.4 節で非座標基底の例を与えるが，以下では常に座標基底を取ることを暗黙の了解とする．

さてここで座標変換 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ によって新しい座標系 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n)$ へ移ると，$\overrightarrow{V}$ の成分は

$$\bar{V}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}V^j, \tag{2.7}$$

と変換する．一方 df/dt の値は明らかに座標によらないから，ベクトル $\overrightarrow{V}$ 自身もまた座標変換に対して不変である．よって $\overrightarrow{V} = \bar{V}^i \overrightarrow{\bar{e}}_i = V^i \overrightarrow{e}_i$ より基底 $\overrightarrow{e}_i$ に対する変換則として

$$\overrightarrow{\bar{e}}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \overrightarrow{e}_j, \tag{2.8}$$

を得る．これはもちろん (2.5) 式と整合的である．一般に座標基底に対する成分が (2.7) 式のように変換するものを反変ベクトル (contravariant vecter) という．「反変」の名の由来はそれが基底の変換則 (2.8) と逆の変換をするからである．

一方，成分が (2.8) 式と同様に変換するベクトル，

$$\bar{W}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} W_j, \tag{2.9}$$

を共変ベクトル (covariant vector) という．共変ベクトルは接ベクトル空間 $T(M^n)$ から実数空間への線形写像，

$$\boldsymbol{W} : \overrightarrow{V} \rightarrow \boldsymbol{W}(\overrightarrow{V}) = W_i V^i, \tag{2.10}$$

である．その基底ベクトル $\boldsymbol{\omega}^i$ は (2.6) 式に対応して

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^1 &= (1, 0, \cdots, 0), \\
\boldsymbol{\omega}^2 &= (0, 1, \cdots, 0), \\
&\cdots \\
\boldsymbol{\omega}^n &= (0, 0, \cdots, 1),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

と表現され，その変換則は

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \boldsymbol{\omega}^j, \tag{2.12}$$

で与えられる．共変ベクトルの全体が作る空間を双対接ベクトル空間 (cotangent vector space) といい，$T^*(M^n)$ で表す．

これからわかるように，反変ベクトルの成分を表す添字は常に「上つき」であり，共変ベクトルは「下つき」である．またベクトルの一般化として，基底 $\overrightarrow{e}_i$ や $\boldsymbol{\omega}^i$ のテンソル積，$\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j$，$\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j \otimes \boldsymbol{\omega}^k$ 等で張られる線形空間を考えることができる．それらを総称して接空間といい，その要素をテンソル

という．上のベクトルの定義から明らかなように，テンソルもまた座標によらない概念である．

その成分の添字がすべて上つきのテンソル $T^{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$ は座標変換 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ に対して

$$\bar{T}^{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell} = \frac{\partial \bar{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i'_\ell}}{\partial x^{i_\ell}} T^{i_1 i_2 \cdots i_\ell}, \tag{2.13}$$

と変換する．このようなテンソルを ℓ 階の反変テンソル (contravariant tensor of rank ℓ), あるいは $(\ell, 0)$ 型のテンソル ($(\ell, 0)$-type tensor) という．また，添字がすべて下つきのテンソル $T_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$ は

$$\bar{T}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial \bar{x}^{i'_\ell}} T_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}, \tag{2.14}$$

と変換する．これを ℓ 階の共変テンソル (covariant tensor of rank ℓ), あるいは $(0, \ell)$ 型のテンソル ($(0, \ell)$-type tensor) という．さらに，上つきと下つきの添字が混ざった場合を混合テンソルという．例えば，$T_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}{}^{j_1 j_2 \cdots j_k}$ は

$$\bar{T}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell}{}^{j'_1 j'_2 \cdots j'_k} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial \bar{x}^{i'_\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \bar{x}^{j'_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j'_k}}{\partial x^{j_k}} T_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}{}^{j_1 j_2 \cdots j_k}, \tag{2.15}$$

と変換するが，これを (k, ℓ) 型の混合テンソルという．テンソルは一般にその添字に関して対称とは限らないから，その位置が異なればその成分の値が異なることに注意しなければならない．また混合テンソルで添字の位置が異なるものは異なるテンソルである．例えば，$T^{ij}{}_k \neq T^{i}{}_{\bullet k}{}^{j}$ である．

テンソルの最も重要な例が計量テンソルである．いま線素 $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ を与える計量を考えると，ds^2 は座標変換に対して不変であるから

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j = \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j,$$

が成り立つ．ここで座標の無限小変位 dx^i は

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j,$$

と変換する．これは共変ベクトルの基底の変換則 (2.12) と同じである．よって $\boldsymbol{g} = g_{ij} \boldsymbol{\omega}^i \otimes \boldsymbol{\omega}^j$ とすると $\boldsymbol{g}$ は確かに 2 階の共変テンソルである．これからわかるように座標基底 $\boldsymbol{\omega}^i$ は物理的には dx^i を表すと考えてよい．

一方，計量テンソルの成分 g_{ij} を n 階の対称行列の成分と見なしたときの逆行列 $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ を考えると，$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ と $(\partial\bar{x}^i/\partial x^k)(\partial x^k/\partial\bar{x}^j) = \delta^i_j$ より g^{ij} は

$$\bar{g}^{i'j'}(\bar{x})\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^{j'}} = g^{ij}(x)\,, \tag{2.16}$$

と変換する．よって $g^{ij}\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j$ は 2 階の対称反変テンソルである．

このように，テンソルの座標基底に対する成分を見ればその性質は明らかになる．そこで以後は座標基底を取ることを前提とし，テンソルをその成分表示で表す．例えば計量テンソルを単に g_{ij} と記す．

(b) ベクトルの内積

再び n 次元ユークリッド空間に戻って，デカルト座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ に対する線素を考えよう：

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j; \quad g_{ij} = \delta_{ij}\,.$$

このとき，任意のベクトル $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ の内積はそのデカルト座標での成分をそれぞれ A^i, B^i とすると

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \delta_{ij}A^iB^j \ (= g_{ij}A^iB^j), \tag{2.17}$$

である．これより一般の n 次元空間においてもベクトルの内積は

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = g_{ij}A^iB^j, \tag{2.18}$$

で与えられることが予想される．実際，内積は座標変換に対して不変でなければならないが，前節のテンソルの定義より計量が二つのベクトルから実数空間への写像,

$$\boldsymbol{g}\,:\,\overrightarrow{A},\,\overrightarrow{B}\ \rightarrow\ \boldsymbol{g}(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = g_{ij}A^iB^j,$$

になっていることからこれは明らかである．さらに，ある点において局所的にデカルト的な座標を取れば，その点では (2.18) 式は (2.17) 式に還元する．よって (2.18) 式は確かに内積の正しい定義になっている．

(c) 添字の上げ下げ

項目 (a) で与えたテンソルの定義では，共変テンソルと反変テンソルとはまったく独立なものである．しかし，多様体上に計量が定義されているとそれらの間に一対一の関係がつく．例えば，反変ベクトル T^i に対して

$$T_i := g_{ij}T^j,$$

によって共変ベクトル T_i を定義すれば，この対応は一対一であり，T_i から $g^{ij}T_j$ によって反変ベクトルを定義すれば

$$g^{ij}T_j = g^{ij}g_{jk}T^k = \delta^i_k T^k = T^i,$$

によって再びもとの T^i に戻る．このように計量によってテンソルの添字を上げたり下げたりすることができる．よって以後は，同じ記号で表す共変テンソルと反変テンソルは，(成分の値自身は異なるが) 同じ物理量を表現する対象と考える．例えば T^{ij} と $T^i{}_j$ は，

$$T^{ij} = g^{jk}T^i{}_k,$$

の関係があることを前提とする．

(d) テンソルの縮約

(k,ℓ) 型のテンソル $T^{i_1i_2\cdots i_k}{}_{j_1j_2\cdots j_\ell}$ の上つきの添字 i_p $(1 \le p \le k)$ と下つきの添字 j_q $(1 \le q \le \ell)$ に関して $i_p = j_q = j$ とおき，j について 1 から n までの和を取ると $(k-1, \ell-1)$ 型のテンソルが得られる：

$$\tilde{T}^{i_1i_2\cdots i_{k-1}}{}_{j_1j_2\cdots j_{\ell-1}} = T^{i_1i_2\cdots i_{p-1}\,j\,i_{p+1}\cdots i_k}{}_{j_1j_2\cdots j_{q-1}\,j\,j_{q+1}\cdots j_\ell}. \tag{2.19}$$

これをテンソルの縮約 (contraction) という．記号の簡単化のため，縮約された成分を例えば $T^{i_1\,j\,i_3}{}_{j_1\,j\,j_3} = T^{i_1\,\cdot\,i_3}{}_{j_1\,\cdot\,j_3}$ のように点 $(\cdot)$ で表すことがある．

(e) 対称化と反対称化

任意のテンソルに対して，その添字に関する完全対称化を丸い括弧で，完全反対称化をかぎ括弧で表す．例えば，T_{ij} や T_{ijk} に対して

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right),$$

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right),$$

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{jki} + T_{kij} + T_{kji}\right),$$
$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(T_{ijk} - T_{ikj} - T_{jik} + T_{jki} + T_{kij} - T_{kji}\right),$$

である．

2.3　平行移動と共変微分

一般相対論に限らず，物理量を表すベクトルやテンソルは空間（時空）のある一点でのみ定義されているのではなく，場としての広がりをもっている．そして空間のある点から別の点へ移動するとき，その値がどのように変化していくかが問題となる．そして場の変化の具合はその微分によって決められる．一般の n 次元空間においても，スカラー $f(x)$ は座標変換 $x^i \to \bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ に対して $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ と不変に保たれる．よってその微分は共変ベクトルとして変換する：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\,. \tag{2.20}$$

ところが，ベクトルやテンソルの座標に対する単なる偏微分はテンソルとしての共変的性質をもたない．例えばベクトル A^i の偏微分 $A^i{}_{,j}$ に関して座標変換を考えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^i(x)}{\partial x^j} &= \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\ell}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{A}^k(\bar{x})\right)\\ &= \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{A}^k}{\partial \bar{x}^\ell} + \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^k}\bar{A}^k,\end{aligned} \tag{2.21}$$

となり，テンソルとしての変換性をもたない．無限小といえども異なる 2 点における座標は一般に異なっており，異なる 2 点でのベクトルの値をそのまま比較することに幾何学的意味がないからである．すなわち，無限小はなれた異なる 2 点におけるベクトルやテンソルを比較する座標不変な方法が必要である．この方法を与えるのが平行移動である．そして，平行移動に基づいて座標変換に対して不変な意味をもつ微分，共変微分が定義される．

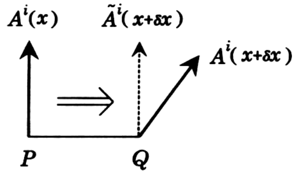


図 2.2

まず，平行移動を定義しよう．そのためには，ある点 P で与えられたベクトル $A^i(P)$ に対して，そこから離れた点 Q において $A^i(P)$ に「平行な」ベクトル $\tilde{A}^i(Q)$ を何らかの方法で構成しなければならない．そこで図 2.2 のように，点 Q として点 P から無限小はなれた点を取り，点 P, Q での座標の値をそれぞれ $x^i, x^i+\delta x^i$ とする．つまり点 P で与えられたベクトル $A^i(x)$ に対して，それを点 Q まで平行移動して得られるベクトルを $\tilde{A}^i(x+\delta x)$ とする．このとき，$\tilde{A}^i(x+\delta x)$ と $A^i(x)$ との差は δx^i が無限小であることから，A^i と δx^i の値に線形に依存するであろう．そこでこの無限小の平行移動を

$$\tilde{A}^i(x+\delta x) := A^i(x) - \Gamma^i{}_{jk}(x)A^j(x)\delta x^k, \tag{2.22}$$

によって定義する．ここで現れる係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ を，点 P における接続係数 (connection coefficient) あるいは単に接続 (connection) という．

さて，接続係数はもちろん任意ではなく，通常の平坦な空間で定義される直観的な平行移動の概念と矛盾しないことが必要である．そこで接続係数に対する条件として，平行移動によってベクトルの大きさと任意の二つのベクトルのなす角が不変に保たれることを要求しよう．これは任意の二つのベクトルの内積が不変であることを意味する．すなわち，

$$\begin{aligned}
&g_{ij}(x)A^i(x)B^j(x)\\
&= g_{ij}(x+\delta x)\tilde{A}^i(x+\delta x)\tilde{B}^j(x+\delta x)\\
&= \left(g_{ij}+g_{ij,k}\delta x^k\right)\left(A^i(x)-\Gamma^i{}_{\ell k}A^\ell(x)\delta x^k\right)\left(B^j(x)-\Gamma^j{}_{\ell k}B^\ell(x)\delta x^k\right)\\
&= g_{ij}(x)A^i(x)B^j(x) + \left[g_{ij,k} - g_{\ell j}\Gamma^\ell{}_{ik} - g_{i\ell}\Gamma^\ell{}_{jk}\right]A^iB^j\delta x^k + O\left((\delta x)^2\right),
\end{aligned}$$

である．これが任意の $A^i, B^i, \delta x^i$ に対して成り立つためには

$$g_{ij,k} - g_{\ell j}\Gamma^\ell{}_{ik} - g_{i\ell}\Gamma^\ell{}_{jk} = 0, \tag{2.23}$$

でなければならない．

ここで，接続係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ の座標変換に対する変換性を考えよう．定義式 (2.22) を別の座標 $\bar{x}^i$ で考え，A^i と $\tilde{A}^i$ がそれぞれ点 P と点 Q で反変ベクトルとして変換することを利用すると

$$\bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} = \Gamma^\ell{}_{pq} - \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^p \partial x^q} \tag{2.24}$$

を得る．明らかに $\Gamma^i{}_{jk}$ はテンソルではない．しかし，$\partial^2\bar{x}^i/\partial x^p\partial x^q = \partial^2\bar{x}^i/\partial x^q\partial x^p$ であることから，$\Gamma^i{}_{jk}$ の下つきの添字 j,k に関する反対称部分 $\Gamma^i{}_{[jk]}$ はテンソルである：

$$\bar{\Gamma}^i{}_{[jk]}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} = \Gamma^\ell{}_{[pq]}\,. \tag{2.25}$$

さて，我々が興味ある空間は局所的には平坦な空間と区別できない空間である．つまり任意の点において局所的にはデカルト的な座標が取れる．よってそのときの接続係数はゼロとなるはずである．特に接続の反対称部分 $\Gamma^i{}_{[jk]}$ もゼロである．ところが，$\Gamma^i{}_{[jk]}$ はテンソルであるから，座標変換によって任意の点でゼロと取れるならばどのような座標を取っても恒等的にゼロのはずである．そこで以降では $\Gamma^i{}_{[jk]}=0$ を仮定する．いい換えると $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{(jk)}$ を満たす接続のみを考える．これを対称な接続という．

対称な接続に対しては条件式 (2.23) を $\Gamma^i{}_{jk}$ に関して解くことができる．添字 i,j,k に関して以下のような入れ換えを考える：

$$\begin{aligned} g_{ij,k} - \Gamma_{jik} - \Gamma_{ijk} &= 0, \\ g_{ik,j} - \Gamma_{kij} - \Gamma_{ikj} &= 0, \\ -g_{kj,i} + \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} &= 0, \end{aligned}$$

ここで $\Gamma_{ijk} := g_{i\ell}\Gamma^\ell{}_{jk}$ として Γ_{ijk} を定義した．これらの式の和を取り Γ_{ijk} の対称性に注意すると

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right), \tag{2.26}$$

あるいは

$$\Gamma^i{}_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2}g^{i\ell}\left(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}\right), \tag{2.27}$$

を得る．ここで最後の等式は $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ の定義であり，クリストッフェル記号 (Christoffel's symbol) という．このように対称な接続は，計量の微分からなるクリストッフェル記号によって一意的に決まる．接続がクリストッフェル記号で与えられる空間がリーマン空間である．

平行移動が定義されると，無限小異なる 2 点におけるベクトルを同一点に平行移動することによって，ベクトルの微分を同一点でのベクトルの差として評価することができる．この無限小の差をとる演算子を D で表す．すなわち，

$$\begin{aligned} DA^i &:= A^i(x+\delta x) - \tilde{A}^i(x+\delta x) \\ &= A^i(x+\delta x) - A^i(x) + \Gamma^i{}_{jk}A^j\delta x^k \\ &= \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j\right)\delta x^k, \end{aligned} \tag{2.28}$$

である（図 2.2 参照）．この右辺の括弧内を反変ベクトル A^i の共変微分といい，偏微分をコンマ (,) や ∂ で表すのに対応して，通常セミコロン (;) や ∇ で表す：

$$A^i{}_{;k} \equiv \nabla_k A^i = A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j. \tag{2.29}$$

これが (1,1) 型のテンソルになっていることは定義から明らかであるが，$A^i{}_{,k}$ の変換式 (2.21) と $\Gamma^i{}_{jk}$ の変換式 (2.24) からも直接確かめられる．

一方，任意の共変ベクトル B_i に対する共変微分は内積 A^iB_i がスカラーであることから，$D(A^iB_i)$ が通常の偏微分となることと，D が線形微分作用素としてライプニッツ則を満たすことを要請して決まる：

$$\begin{aligned} D(A^iB_i) &= \left(A^i{}_{,k}B_i + A^iB_{i,k}\right)\delta x^k \\ &= (DA^i)B_i + A^i(DB_i) \\ &= \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j\right)B_i\delta x^k + A^i(DB_i)\,. \end{aligned}$$

これが任意の A^i に対して成り立つことから

$$DB_i = \left(B_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik}B_j\right)\delta x^k, \tag{2.30}$$

を得る．よって共変ベクトルの共変微分は

$$B_{i;k} \equiv \nabla_k B_i = B_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik}B_j\,, \tag{2.31}$$

で与えられる．これは $(0,2)$ 型のテンソルである．

一般のテンソルに対しての共変微分は，上のベクトルの場合を一般化して

$$
\begin{aligned}
T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell ; q} = T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell , q} & \\
+ \sum_{m=1}^{k} \Gamma^{i_m}_{p\,q} T^{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}\, p\, i_{m+1} \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell} & \\
- \sum_{m=1}^{\ell} \Gamma^{p}{}_{j_m q} T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_{m-1}\, p\, j_{m+1} \cdots j_\ell} , & \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

で与えられる．特に計量テンソルに対する共変微分は

$$
g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^{\ell}{}_{ik} g_{\ell j} - \Gamma^{\ell}{}_{jk} g_{i\ell}, \qquad (2.33)
$$

となるが，これと接続の満たすべき条件式 (2.23) とを比較すると $g_{ij;k} = 0$ であることがわかる．すなわち計量テンソルは共変微分に対して定数のように振る舞う．反変計量テンソル g^{ij} も同様に $g^{ij}{}_{;k} = 0$ が示せる．よって，例えば

$$
\left(g_{ij} A^i B^j \right)_{;k} = g_{ij} \left(A^i{}_{;k} B^j + A^i B^j{}_{;k} \right),
$$

である．

2.4　曲率テンソル

2.1 節で述べたように，計量テンソルの形だけからは空間が曲がっているかどうかは判断できない．リーマン空間は局所的には平坦な空間だからである．空間の曲がり具合を測るために，ある程度広がった領域を考える必要がある．

いま，図 2.3 のように空間の小さな領域に無限小異なる 4 点 P, Q_1, Q_2, R を頂点とする平行四辺形を考え，点 P で与えられたベクトル $A^i(P)$ を，その四辺形の辺に沿ってそれぞれ Q_1 と Q_2 を通る二つの異なる経路に沿って R まで平行移動することを考える．ベクトル $\overrightarrow{PQ_1}$ $(= \overrightarrow{Q_2R})$ を $\delta_1 x^i$，$\overrightarrow{PQ_2}$ $(= \overrightarrow{Q_1R})$ を $\delta_2 x^i$ とする．また，$A^i(P)$ を P から Q_1 へ平行移動したものを $\tilde{A}^i(Q_1)$，その $\tilde{A}^i(Q_1)$ を Q_1 から R まで平行移動したものを $\tilde{A}^i(R_1)$ とし，同様に P から Q_2 へ平行移動したものを $\tilde{A}^i(Q_2)$，次にそれを P から R へ平行移動したものを $\tilde{A}^i(R_2)$ とする．このとき，空間が平坦であれば $\tilde{A}^i(R_1)$ と $\tilde{A}^i(R_2)$ は一

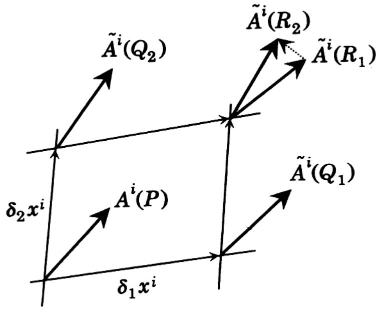


図 2.3

致するであろうが，曲がった空間上では微小な差が存在するであろう．この差は $\delta_1 x^i$ と $\delta_2 x^i$ が無限小の極限では，そのそれぞれに比例し，A^i にも比例すると考えられる．すなわち，

$$\delta A^i := \tilde{A}^i(R_2) - \tilde{A}^i(R_1) = R^i{}_{jk\ell} A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^\ell, \tag{2.34}$$

と書けるはずである．ここで比例係数として現れる $R^i{}_{jk\ell}$ は，その現れ方から明らかに ((1,3)-型の) テンソルである．これをリーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor)，あるいは単にリーマンテンソルという．そこでこの δA^i を計算し，リーマンテンソルの具体的表式を求めよう．

平行移動の定義式 (2.22) より，$\tilde{A}^i(Q_1)$ は

$$\tilde{A}^i(Q_1) = A^i(P) - \Gamma^i{}_{jk}(P) A^j(P) \delta_1 x^k, \tag{2.35}$$

である．これより $\tilde{A}^i(R_1)$ は

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i(R_1) &= \tilde{A}^i(Q_1) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_1)\tilde{A}^j(Q_1)\delta_2 x^k \\
&= A^i(P) - \Gamma^i{}_{jk}(P)A^j(P)\delta_1 x^k \\
&\quad - \left(\Gamma^i{}_{jk}(P) + \Gamma^i{}_{jk,\ell}(P)\delta_1 x^\ell\right) \\
&\quad \times \left(A^j(P) - \Gamma^j{}_{mn}(P)A^m(P)\delta_1 x^n\right)\delta_2 x^k \\
&= A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j\left(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k\right) \\
&\quad - \left(\Gamma^i{}_{j\ell,k} - \Gamma^i{}_{n\ell}\Gamma^n{}_{jk}\right)A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^\ell,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

で与えられる．ここで式の繁雑さを避けるため最後の式から引数の P を省略し

た．同様にして $\tilde{A}^i(R_2)$ は

$$\begin{aligned}\tilde{A}^i(R_2) &= \tilde{A}^i(Q_2) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_2)\tilde{A}^j(Q_2)\delta_1 x^k \\ &= A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j\left(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k\right) \\ &\quad - \left(\Gamma^i{}_{jk,\ell} - \Gamma^i{}_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell}\right)A^j\delta_1 x^k\delta_2 x^\ell, \end{aligned} \tag{2.37}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\delta A^i &= \tilde{A}^i(R_2) - \tilde{A}^i(R_1) \\ &= \left(\Gamma^i{}_{j\ell,k} - \Gamma^i{}_{jk,\ell} + \Gamma^i{}_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell} - \Gamma^i{}_{n\ell}\Gamma^n{}_{jk}\right)A^j\delta_1 x^k\delta_2 x^\ell, \end{aligned} \tag{2.38}$$

を得る．これは確かに (2.34) 式の形をしており，リーマンテンソルの具体形として

$$R^i{}_{jk\ell} = \Gamma^i{}_{j\ell,k} - \Gamma^i{}_{jk,\ell} + \Gamma^i{}_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell} - \Gamma^i{}_{n\ell}\Gamma^n{}_{jk}, \tag{2.39}$$

を得る．

この表式からわかるように，リーマンテンソルは基本的に計量テンソルの 2 階微分である．これはちょうど平面上の曲線 $y = f(x)$ の曲がり具合が，その 2 階微分 $f''(x)$ で決まることに対応している．そして，空間が平坦であればリーマンテンソルは恒等的にゼロであり，その逆も真である．また，(2.39) 式から直接確かめられるように，リーマンテンソルには $R_{ijk\ell} = g_{in}R^n{}_{jk\ell}$ とすると以下のような対称性がある：

$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij} = R_{[ij][k\ell]}\,, \qquad R_{i[jk\ell]} = 0\,. \tag{2.40}$$

平行移動と共変微分の関係から予想されるように，リーマンテンソルは共変微分の非可換性の度合を表す係数として現れる．すなわち，$A^i{}_{;j;k}$ と $A^i{}_{;k;j}$ との差を計算すると

$$A^i{}_{;j;k} - A^i{}_{;k;j} = R^i{}_{\ell kj}A^\ell, \tag{2.41}$$

を得る．添字 i を下げて対称性の式 (2.40) を使うとこれは

$$A_{i;j;k} - A_{i;k;j} = R^\ell{}_{ijk}A_\ell, \tag{2.42}$$

とも書ける．

(2.40) 式で与えたリーマンテンソルの対称性より，n 次元空間の各点におけるリーマンテンソルの代数的に独立な成分の個数は $n^2(n^2-1)/12$ であることがわかる．特に $n=2$ ならば独立成分は 1 個しかなく，$n=3$ ならば 6 個，$n=4$ ならば 20 個である．

リーマンテンソルの 1 番目の添字と 3 番目に関して縮約を取ったものと，その残りの添字に関してさらに縮約を取ったものをそれぞれリッチテンソル (Ricci tensor)，リッチスカラー (Ricci scalar) という：

$$R_{ij} := R^{\ell}{}_{i\ell j}, \qquad R := g^{ij}R_{ij}. \tag{2.43}$$

リッチテンソルはリッチ曲率テンソルともいい，添字 i, j に関して対称である：$R_{ij}=R_{ji}$. よってその代数的独立成分は $n(n+1)/2$ 個 ($n \geq 3$) である．また，リッチスカラーのことをスカラー曲率 (scalar curvature) ともいう．$n=2$ のときはスカラー曲率のみでリーマンテンソル，リッチテンソルが表される：

$$R_{ijk\ell} = g_{i[k}g_{\ell]j}R, \qquad R_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (n=2). \tag{2.44}$$

リーマンテンソルの代数的独立成分から，リッチテンソルで表される成分を取り去った残りの成分は $n(n+1)(n+2)(n-3)/12$ 個ある ($n \geq 3$). これを表すテンソル：

$$C_{ijk\ell} := R_{ijk\ell} - \frac{2}{n-2}\left\{g_{i[k}R_{\ell]j} + g_{j[\ell}R_{k]i} - \frac{1}{n-1}g_{i[k}g_{\ell]j}R\right\} \quad (n \geq 3), \tag{2.45}$$

をワイルテンソル (Weyl tensor) という．ワイルテンソルはその構成法からリーマンテンソルと同じ対称性のほかに，

$$C^{\ell}{}_{i\ell j} = 0, \tag{2.46}$$

を満たす．$n=3$ のとき，明らかにワイルテンソルは恒等的にゼロであり，(2.45) 式はリーマンテンソルをリッチテンソルで表す式になっている．ワイルテンソルが非自明な代数的独立成分をもつのは $n=4$ 以上のときであり，第 5 章で触れるように，実は我々の時空の次元が 4 であることが，重力に物理的自由度が存在することの非常に重要な理由になっている．またワイルテンソルは計量の共形変換 (conformal transformation),

$$g_{ij}(x) \ \to \ \bar{g}_{ij}(x) = \phi^2(x)g_{ij}(x),$$

に対して不変に保たれる．ワイルテンソルがゼロの空間を共形的平坦な空間 (conformally flat space) という．

リーマンテンソルの共変微分に対して次の恒等式が成り立つことが知られている：

$$R_{ij[k\ell;n]} \equiv 0 \iff R_{ijk\ell;n} + R_{ij\ell n;k} + R_{ijnk;\ell} \equiv 0\,. \tag{2.47}$$

これをビアンキ恒等式 (Bianchi identities) という．また，この恒等式の添字 i と k，j と ℓ についてそれぞれ縮約をとったもの：

$$g^{ik}g^{j\ell}R_{ij[k\ell;n]} = R_{;n} - 2R_n{}^i{}_{;i} \equiv 0,$$

を縮約されたビアンキ恒等式 (contracted Bianchi identities) という．この恒等式は

$$G^{ij}{}_{;j} \equiv 0; \quad G^{ij} := R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\,, \tag{2.48}$$

と書き換えることができる．ここで定義した 2 階の対称テンソル G^{ij} のことをアインシュタインテンソル (Einstein tensor) といい，一般相対論で中心的な役割を果たす．

最後に，曲がった空間の最も簡単な例として n 次元球面を取り上げよう．我々になじみの深い 2 次元球面の類推からわかるように，n 次元球面の曲率もその半径のみによって決まる．その半径を a とするとリーマンテンソルは

$$\overset{(n)}{R}{}_{ijk\ell} = \frac{1}{a^2}\left(\overset{(n)}{g}{}_{ik}\,\overset{(n)}{g}{}_{j\ell} - \overset{(n)}{g}{}_{i\ell}\,\overset{(n)}{g}{}_{jk}\right), \tag{2.49}$$

で与えられる．また，リッチテンソル，スカラー曲率はそれぞれ，

$$\overset{(n)}{R}{}_{ij} = \frac{n-1}{a^2}\,\overset{(n)}{g}{}_{ij}\,, \qquad \overset{(n)}{R} = \frac{n(n-1)}{a^2}\,, \tag{2.50}$$

となる．ここで，n 次元であることを明確に示すために，曲率や計量テンソルに記号 (n) をつけた．

この例からわかるように，リーマンテンソルは一般に (長さ)$^{-2}$ の次元をもち，次元解析的に

$$R_{ijk\ell} \sim \frac{1}{(\text{曲率半径})^2}\,,$$

のオーダーである．このことは一般相対論において物質が作り出す時空の曲率の大体の大きさを知るうえで，常に頭に入れておくべき視点である．

問　　題

2.1　(2.41), (2.42) 式を示せ．

2.2　リーマンテンソル $R_{ijk\ell}$ の対称性 (2.40) から，n 次元空間 $(n \geq 2)$ ではその代数的独立成分が $n^2(n^2-1)/12$ 個であることを示せ．

2.3　共形変換 $g_{ij} \rightarrow \bar{g}_{ij} = \phi^2 g_{ij}$ を考える．計量 $\bar{g}_{ij}$ の接続係数 $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}$ を g_{ij} の接続係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ と ϕ を使って表せ．

3　曲がった時空と測地線方程式

第 2 章では曲がった空間を記述する幾何学，リーマン幾何学の基本的枠組みについて述べた．しかし，それを基にした様々な数学的推論の結果はそのままでは物理にならず，そこに時間という要素が入って初めて物理的意義をもつ．現象の原因と結果，因果関係が物理にとって本質的だからである．そして一般相対論では，リーマン幾何学を時空に適用することによって，その数学的構造がまさに時空のダイナミックスを支配する物理法則として実現している．そこでこの章では，時空特有の因果構造に注意しつつ，時空のリーマン幾何学において物理的に重要となるいくつかの概念について考察する．

3.1　ミンコフスキー時空

まず初めに特殊相対論の基礎となる平坦な時空, ミンコフスキー時空 (Minkowski spacetime) について復習しよう．その線素は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3.1}$$

で与えられる．ここで光速 c は単なる定数であるから，より統一的に表現するため

$$\{x^\mu\} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

なる座標を導入すると

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,; \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1,\ 1,\ 1,\ 1), \tag{3.2}$$

と書ける．ここでギリシャ文字の添字 μ, ν は 0 から 3 まで走る時空の足であり，$\{x^\mu\}$ はミンコフスキー時空上のデカルト的座標，$\eta_{\mu\nu}$ はその座標に対する

計量を表す．以後もこの規則に従う．もちろん座標 $\{x^\mu\}$ の定義域は実数空間全体 $(-\infty < x^\mu < \infty)$ である．また，第1章でも触れたように，時間と空間は本来同一の次元をもった量であり，光速 c はその間の単なる換算係数である．そこで，相対論ではしばしば $c = 1$ の単位系を採用する．この単位系では例えば $1\,\mathrm{sec} = 3 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}$ である．しかし，以下では特に断らない限り c をあらわにしておくことにする．

ミンコフスキー時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は次のような座標の1次変換に対して不変である：

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu; \quad \det \Lambda^\mu{}_\nu = \pm 1,\ (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = \eta^{\alpha\mu}(\Lambda^T)_\mu{}^\nu \eta_{\nu\beta}. \quad (3.3)$$

ここで Λ^T, Λ^{-1} はそれぞれ行列 Λ の転置行列，逆行列である．これをローレンツ変換 (Lorentz transformation) といい，特に $\det \Lambda^\mu{}_\nu = 1$ かつ $\Lambda^0{}_0 > 0$ の場合を固有ローレンツ変換 (proper Lorentz transformation) という．(3.3) 式からわかるように，ローレンツ変換は $\eta_{\mu\nu}$ の符号が一つ負であることを除けば，4次元の直交変換と同じである．よって群論的にいえば一般のローレンツ変換は $O(3,1)$, 固有ローレンツ変換は ($\Lambda^0{}_0 > 0$ の制限つきで) $SO(3,1)$ で表される．固有ローレンツ変換は時間反転や空間反転を含まない変換であり，以後は簡単のため固有ローレンツ変換のみを考え，それを単にローレンツ変換と呼ぶ．

2.2節で考察した一般座標変換に対するスカラー，ベクトル，テンソルをローレンツ変換に限った場合に定義されるものを，それぞれローレンツスカラー，ローレンツベクトル，ローレンツテンソルと呼ぼう．これらの内積や添字の上げ下げは計量 $\eta_{\mu\nu}$ で行われる．明らかに座標 x^μ はそれ自身でローレンツ共変ベクトルである．また計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対する接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ はゼロであるから，明らかに任意の点[1] P で与えられたベクトル $V^\mu(P)$ と，そのベクトルの別の任意の点 Q への平行移動 $\tilde{V}^\mu(Q)$ の成分は同じである：$\tilde{V}^\mu(Q) = V^\mu(P)$. これより特に，点 P における座標 $x^\mu(P)$ と点 Q における座標 $x^\mu(Q)$ の差 $x^\mu(P) - x^\mu(Q)$ はローレンツベクトルであり，その大きさは

[1] ミンコフスキー時空に限らず一般の時空上の1点を通常「世界点」と呼ぶが，本書では特に強調する場合以外は単に「点」と呼ぶ．

$$s_{PQ}^2 = \eta_{\mu\nu}\Big(x^\mu(P) - x^\mu(Q)\Big)\Big(x^\nu(P) - x^\nu(Q)\Big), \tag{3.4}$$

で与えられ，これはローレンツスカラーである．よってこの s_{PQ}^2 が 2 点 P, Q 間のローレンツ不変な距離（の 2 乗）を与える．

計量 $\eta_{\mu\nu}$ が正定値でないため，s_{PQ}^2 は正定値でない．$s_{PQ}^2 > 0$ のとき，適当なローレンツ変換で P, Q の時間座標 x^0 を一致させることができる．この場合，点 P, Q は互いに空間的 (spacelike) であるという．反対に $s_{PQ}^2 < 0$ のとき，点 P, Q の空間座標 x^i $(i = 1, 2, 3)$ を一致させることができ，点 P, Q は互いに時間的 (timelike) であるという．特に，$x^0(Q) - x^0(P) > 0$ ならばベクトル $\Delta x^\mu_{P\to Q} := x^\mu(Q) - x^\mu(P)$ は未来に時間的 (future timelike), $x^0(Q) - x^0(P) < 0$ ならば $\Delta x^\mu_{P\to Q}$ は過去に時間的 (past timelike) であるという．また，異なる 2 点 P, Q に対し $s_{PQ}^2 = 0$ のとき，それらは互いに光的 (lightlike) あるいはヌル (null) であるという．この場合も時間的な場合と同様に $\Delta x^\mu_{P\to Q}$ は，$x^0(Q) - x^0(P) > 0$ ならば未来に光的，$x^0(Q) - x^0(P) < 0$ ならば過去に光的であるという．

このことから，点 P に対してミンコフスキー時空を三つの異なる不変的領域に分けることが可能となる．すなわち，点 P の未来と過去，そのどちらでもない空間的領域である．そして，それらを分ける境界面が未来と過去に向かう二つの光円錐 (future lightcone, past lightcone) である．この様子を図示したの

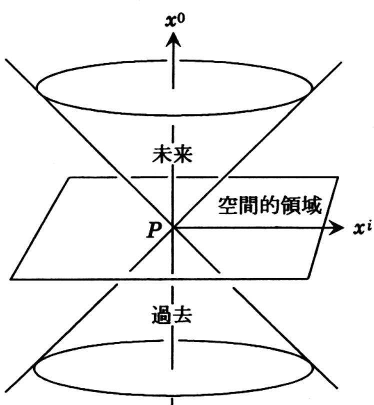


図 3.1

が図 3.1 である．そこで 45 度の方向は常にヌルである．時空の因果的構造をこのように表した図を一般に時空図 (spacetime diagram) という．また，こうした因果的性質は一般のローレンツベクトルに対してもそのまま当てはまる．すなわち，ゼロでないベクトル V^μ に対して $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0$ ならば空間的ベクトル，$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0$ ならば時間的ベクトル，$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$ ならばヌルベクトルである．

ミンコフスキー時空上で質量 m の点粒子の運動を考えよう．粒子に力が働いていなければ軌道はミンコフスキー時空上の直線である．特に粒子が静止している慣性系を座標に選べば

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (c\tau, 0, 0, 0),$$

である．ここで τ は粒子の静止系で測った固有時間であり，それを粒子の軌道パラメーターとすると，粒子の 4 元速度 u^μ は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c, 0, 0, 0), \tag{3.5}$$

となる．明らかに $u^0 > 0$，$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$，すなわち u^μ は未来に向かう時間的なベクトルであるが，これはもちろん直感と一致する．また，$p^\mu = mu^\mu$ とすると，p^μ は粒子の 4 元運動量である．

粒子に力が働いている場合にも，各時刻時刻で粒子の瞬間的な静止系を考えることができ，その上で (3.5) 式は成り立つ．よって運動方程式は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu, \tag{3.6}$$

となるが，$u^0 > 0$，$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$ なる性質は不変である．これより任意の力 F^μ は常に u^μ と直交する：$F^\mu u_\mu = 0$. すなわち，力の 4 元ベクトル F^μ は空間的ベクトルであり，その独立な成分の個数は三つである．

また光子等，質量ゼロの粒子が力を受けずに運動する場合は，その軌道が空間の x^3-軸に平行となるように取れば，適当な軌道パラメーター λ を使って

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\lambda, 0, 0, \lambda),$$

と表せる．この場合 4 元速度は存在しないが，4 元運動量 p^μ は存在し，λ を定数倍スケールすることによって

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (1, 0, 0, 1), \tag{3.7}$$

とできる．粒子に力が働く場合の運動方程式は (3.6) 式と同様に，

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = F^\mu, \tag{3.8}$$

で与えられる．この場合もやはり局所的に (3.7) 式を成り立たせる慣性系が存在し，$p^0 > 0$, $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ なる性質は力が働いても変わらない．よってこの局所座標系の x^0-軸と x^3-軸方向に働く力は物理的意味をもたず，力の自由度は本質的に 2 次元である．

3.2 時空の計量と等価原理

一般の時空の線素を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \tag{3.9}$$

と書く．ここで $g_{\mu\nu}$ が時空の計量であるためには，それを行列と見なしたときの固有値の一つが負，他の三つが正であることが必要十分である．この性質をもつ計量を一般にローレンツ計量 (Lorentzian metric) という．よって特にローレンツ計量の行列式は負（$\det g_{\mu\nu} < 0$）である．そして等価原理は，$g_{\mu\nu}$ が局所的にはミンコフスキー時空と同等であることを要求する．このことが任意の対称な接続に対して確かに成り立つことを示そう．

時空上の座標 $x^\mu = a^\mu$ で指定される任意の点 P において，そのまわりで計量 $g_{\mu\nu}$ を展開しよう．一般性を失わずに，まず $x^\mu - a^\mu \to x^\mu$ なる座標変換で点 P を原点に取ると，

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + g_{\mu\nu,\alpha}(0)x^\alpha + O(x^2)\,, \tag{3.10}$$

である．ここで

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2}C^\alpha{}_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + O(x^3), \tag{3.11}$$

なる座標変換を考える．ここで係数 $C^\alpha{}_{\mu\nu}$ は後で決定するある定数である．明らかに $C^\alpha{}_{\mu\nu}$ は添字 μ, ν に関して対称な部分にしか意味がない．よってこの点を強調するために以後 $C^\alpha{}_{(\mu\nu)}$ と記す．座標変換 (3.11) の逆変換は

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha - \frac{1}{2}C^\alpha{}_{(\mu\nu)}\bar{x}^\mu \bar{x}^\nu + O(\bar{x}^3),$$

である．よって

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu - C^\alpha{}_{(\mu\nu)}\bar{x}^\nu + O(\bar{x}^2), \tag{3.12}$$

を得る．これより，新しい座標系 $\{\bar{x}^\mu\}$ での計量は

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta} \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu - C^\alpha{}_{(\mu\sigma)}\bar{x}^\sigma\right)\left(\delta^\beta_\nu - C^\beta{}_{(\nu\rho)}\bar{x}^\rho\right)\left(g_{\alpha\beta}(0) + g_{\alpha\beta,\gamma}(0)\bar{x}^\gamma\right) + O(\bar{x}^2) \\ &= g_{\mu\nu}(0) + \left(g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\mu\alpha}C^\alpha{}_{(\nu\gamma)} - g_{\nu\alpha}C^\alpha{}_{(\mu\gamma)}\right)x^\gamma + O(\bar{x}^2),\end{aligned}$$

となる．この最後の表式と接続係数が満たす条件式 (2.23) とを比較すれば，$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ が対称な接続であれば $C^\alpha{}_{(\mu\nu)}$ を

$$C^\alpha{}_{(\mu\nu)} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(0), \tag{3.13}$$

と取ることによって最終行右辺の括弧内をゼロにできることがわかる．このように $C^\alpha{}_{\mu\nu}$ を選ぶと

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = g_{\mu\nu}(0) + O(\bar{x}^2),$$

となり，明らかに $\bar{g}_{\mu\nu,\alpha}(0) = 0$，ゆえに $\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}(0) = 0$ である．さらに $g_{\mu\nu}$ がローレンツ計量であり $\bar{g}_{\mu\nu}(0) = g_{\mu\nu}(0)$ であることから，適当な定数行列 $A^\mu{}_\nu$ ($\det A^\mu{}_\nu > 0$) によって $\bar{x}^\mu = A^\mu{}_\nu \tilde{x}^\nu$ と座標変換すれば

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu}(0) &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\bar{g}_{\alpha\beta}(0) = A^\alpha{}_\mu \bar{g}_{\alpha\beta}(0) A^\beta{}_\nu \\ &= A^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}(0) A^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} + O(\tilde{x}^2),\end{aligned} \tag{3.14}$$

とできることは明らかであろう．

このように一般の時空の計量は，その上の任意の点の十分近傍でミンコフスキー計量に変換できる．この局所的にミンコフスキー計量を与える座標系を局所ローレンツ系 (local Lorentz frame) という．上でみたように，対称な接続が局所ローレンツ系の存在を保証し，それによって等価原理が保証されることになる．

3.3 測地線方程式

ミンコフスキー時空の場合には，その上の任意の 2 点間の「最短」距離はその 2 点を結ぶ自明な直線で与えられた．この平坦な時空での直線を曲がった時空に一般化した概念が測地線 (geodesics) である．

一般に空間上の任意の 2 点 P_1, P_2 が与えられたとき，その 2 点を結ぶ最短距離は，あらゆる可能な経路の中からその長さが最小となるものを取り出せばよい．そしてそれは経路の積分に対する最小作用の原理で与えられる．これを時空に適用すると，経路をパラメーター λ で $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ と表し，積分

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) d\lambda\,;$$

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,, \tag{3.15}$$

を極小 (極大) にする経路を求めればよいであろう．すなわち S をラグランジュ関数 L の作用積分と見なして x^μ に関して変分を取ればよい．そこで端点を固定して S の変分をゼロとおくとオイラー・ラグランジュ方程式,

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)\right] \delta x^\alpha d\lambda = 0, \tag{3.16}$$

を得る．ここで $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ である．これを具体的に書き下すと

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}\right) - \frac{g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = 0,$$

である．ところで無限小離れた 2 点間の固有距離は

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda,$$

で与えられるから，上の式は

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{3.17}$$

と変形できる．この式に $g^{\mu\alpha}$ を掛けて整理すると

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(2g_{\alpha\nu,\sigma}-g_{\nu\sigma,\alpha}\right)\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=0,$$

となる．この式の第2項を見ると縮約された添字 ν,σ について対称である．よってその部分を

$$\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(2g_{\alpha\nu,\sigma}-g_{\nu\sigma,\alpha}\right)\rightarrow\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\sigma}+g_{\alpha\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\alpha}\right)$$

とおき換えることができるが，これは接続 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ にほかならない．よって，

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=0, \tag{3.18}$$

を得る．これが測地線方程式 (geodesic equation) である．特にミンコフスキー時空上では，計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対していたる所 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}=0$ であるから，$d^2x^\mu/ds^2=0$ となって，測地線は確かに直線である．

上の測地線方程式の導出は基本的には正しいが，時空の計量が正定値でないために2点 P_1,P_2 を結ぶ経路が時間的あるいはヌルになると，ds が虚数あるいはゼロとなり，ラグランジュ関数 L の変分がきちんと定義されていないという欠点をもっている．そこで，この欠点を解消する上の L と等価なラグランジュ関数を定義するのが望ましい．その候補として，非相対論的力学の自由粒子のラグランジュ関数 $L=\frac{1}{2}mv^2$ から類推して

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{3.19}$$

を考える．このとき作用積分

$$S=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}L(x^\mu,\dot{x}^\mu)d\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}d\lambda, \tag{3.20}$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0,$$

となり，やはり測地線方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0, \tag{3.21}$$

を得る．これと以前の導出の仕方との違いは，経路が時間的やヌルになった場合に問題が起こらない点だけでなく，測地線を特徴づける軌道パラメーター λ が

$$\lambda \to \lambda' = a\lambda + b \quad (a, b : \text{定数}), \tag{3.22}$$

なる変換の自由度を除いて一意的に決まってしまうことである．このことは，(3.20) 式で与えた作用積分 S が λ の勝手な変換に対して不変でないことからもわかるであろう．この測地線方程式に現れるパラメーター λ をアフィンパラメーター (affine parameter) という．また，ベクトル $dx^\mu/d\lambda$ のことを測地線の接ベクトルという．

ベクトル k^μ を測地線の接ベクトル $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ とすると，測地線方程式 (3.21) は

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} k^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{Dk^\mu}{d\lambda} = 0, \tag{3.23}$$

と書ける．ここで D は平行移動による変化分を与える，2.3 節の (2.28) 式で定義した微分演算子である．これより測地線の接ベクトルは測地線に沿って平行移動されることがわかる．少しいい方を換えれば，ある点 P を $\lambda = 0$ とすると点 P からベクトル $k^\mu(0)$ の方向へ向かう測地線は，その方向に沿って k^μ を平行移動によって「まっすぐ」伸ばしつつ，$dx^\mu/d\lambda = k^\mu(\lambda)$ を積分した曲線になっている．これは明らかに平坦な時空の直線の概念の自然な拡張である．

また (3.23) 式で，$d/d\lambda = (dx^\mu/d\lambda)(\partial/\partial x^\mu) = k^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ と考えれば測地線方程式は

$$k^\mu{}_{,\alpha} k^\alpha + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = k^\mu{}_{;\alpha} k^\alpha = 0, \tag{3.24}$$

と書ける．この表式は厳密にはベクトル k^μ が場として存在するときにのみ意味がある．しかし，接ベクトルがそれ自身の方向へ平行移動されるという測地線の特徴を簡潔に表しているため，単独の測地線に対してもこの表式を使うことがある．

測地線 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ が与えられると，それに沿って (3.19) 式のラグランジュ関数 L は一定である．これを示そう．いま L を測地線に沿って λ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}L &= \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\ddot{x}^\mu \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)\dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\ddot{x}^\mu\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu\right),$$

を得る．ここで2行目に移るときオイラー・ラグランジュ方程式を使った．ところで，(3.19) 式の L の形より

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu = 2L,$$

が成り立つ．これを上式の最後の右辺に代入すれば $dL/d\lambda = 2dL/d\lambda$ を得るから $dL/d\lambda = 0$ である．よって測地線に沿って

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 一定, \tag{3.25}$$

である．

この事実から L の符号によって測地線を分類することができる．すなわち，$L > 0$ なら空間的，$L < 0$ なら時間的，$L = 0$ ならヌルである．特に $L < 0$ のとき，(3.22) 式のアフィンパラメーターの自由度を使って測地線に沿って

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = -c^2, \tag{3.26}$$

と規格化できる．このとき λ は時間的測地線に沿って運動する有限質量の粒子の固有時間 τ にほかならない．そして局所ローレンツ系では ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} = 0$ より $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$ である．すなわち，曲がった時空上においても自由粒子は局所的には重力を感じない（時空の曲率の存在を関知しえない）．このように自由粒子が測地線に沿って運動することが等価原理の数学的表現である．

3.4 測地線方程式に基づく接続の計算

この節では，測地線方程式の一つの応用として，測地線方程式を使って接続 ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ を比較的簡単に計算する方法について述べる．

簡単な計量の例として線素が

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.27}$$

で与えられる場合を考えてみよう．これに (3.19) 式を適用すればラグランジュ関数 L は

$$L = -\frac{1}{2}A\dot{t}^2 + \frac{1}{2}B\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2; \quad \left(\cdot = \frac{d}{d\lambda}\right), \tag{3.28}$$

となる．オイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\left(A\dot{t}\right)^{\cdot} = 0, \\
&\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial r} = (B\dot{r})^{\cdot} + \frac{1}{2}A_{,r}\dot{t}^2 - \frac{1}{2}B_{,r}\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = 0, \\
&\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \left(r^2\dot{\theta}\right)^{\cdot} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0, \\
&\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)^{\cdot} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

である．これを整理すると

$$
\begin{aligned}
&\ddot{t} + \frac{A_{,r}}{A}\dot{t}\dot{r} = 0, \\
&\ddot{r} + \frac{A_{,r}}{2B}\dot{t}^2 + \frac{B_{,r}}{2B}\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 - \frac{r\sin^2\theta}{B}\dot{\varphi}^2 = 0, \\
&\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0, \\
&\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

を得る．これと測地線方程式(3.21)を比べると座標を $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi)$ と対応させれば[2]，すべての接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ が瞬時に読み取れる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{01} = \frac{A_{,r}}{2A}, \text{ 他の } \Gamma^0{}_{\mu\nu} = 0, \\
&\Gamma^1{}_{00} = \frac{A_{,r}}{2B}, \ \Gamma^1{}_{11} = \frac{B_{,r}}{2B}, \ \Gamma^1{}_{22} = -\frac{r}{B}, \ \Gamma^1{}_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{B}, \text{ 他の } \Gamma^1{}_{\mu\nu} = 0, \\
&\Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}, \ \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \text{ 他の } \Gamma^2{}_{\mu\nu} = 0, \\
&\Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}, \ \Gamma^3{}_{23} = \cot\theta, \text{ 他の } \Gamma^3{}_{\mu\nu} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

を得る．

この例からわかるように，一般に具体的な計量の形とその座標依存性がわかっているときには，測地線方程式を変分原理によって書き下せば，その結果には

---

[2] ここでは t は単なる時間的座標を表しており，通常の時間の単位をもつ必要はないのでわざわざ $x^0 = ct$ と光速 c を挿入していない．

座標のパラメーター微分 $\dot{x}^\mu$ は必ず 2 次形式で現れるから，その係数を読み取ることによって接続係数を一挙に求めることができる．この測地線方程式を使う方法は，具体的に接続係数を求めたいときの一つの有効な手段である．

3.5 測地線偏差の方程式

さて，測地線軌道を 1 本だけ単独で考えている限り時空の曲率を測ることはできないが，第 1 章のエレベーターの例でも述べたように少し離れた 2 本の測地線を考えると，その間の距離がどのように変化するかを観測することによって時空の曲率を知ることができる．そこで，こうした隣り合う測地線の相対的な運動を知るために，時空上のある有限領域で連続的に存在する測地線の集合体，測地線束 (geodesic congruence) を考えよう．

図 3.2 のように測地線のアフィンパラメーターを λ，それぞれの軌道を区別するパラメーターを σ（力学でいうところのラグランジュ座標）とすると，この測地線束は時空上の $x^\mu = x^\mu(\lambda, \sigma)$ で与えられる 2 次元面を張る．実際には，時空の有限体積を覆う測地線束に対しては独立なラグランジュ座標の数は時間的測地線束では三つ，ヌル測地線束に対しては二つある．これは 3.1 節の最後で触れた力の独立成分数と深くかかわっている．しかしここではそのうちの一つに着目して議論を進める．このとき測地線束を局所的に特徴づけるものは，

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = k^\mu, \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = Z^\mu, \tag{3.32}$$

という二つのベクトルである．ここで k^μ, Z^μ はそれぞれ測地線の接ベクトル，

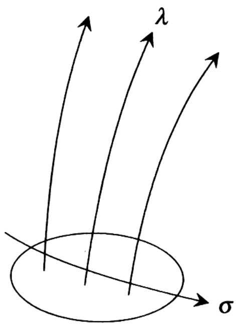


図 3.2

無限小離れた隣り合う測地線を結ぶベクトルを表す．測地線束が有限の時空体積を覆っているときは，これらのベクトルを時空上で連続的に存在する場と見なすことができる．この場合 Z^μ のことをヤコビ場 (Jacobi field) という．ベクトル k^μ はもちろん測地線方程式，

$$k^\mu{}_{;\nu}k^\nu = \frac{Dk^\mu}{\partial\lambda} = 0, \tag{3.33}$$

を満たす．

我々の知りたいのは，ベクトル Z^μ が測地線に沿ってどのように変化していくかである．そこで Z^μ の k^μ 方向の微分を取ると，

$$\begin{aligned} Z^\mu{}_{;\nu}k^\nu &= \frac{DZ^\mu}{\partial\lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}Z^\alpha k^\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}k^\alpha Z^\beta \\ &= \frac{Dk^\mu}{\partial\sigma} = k^\mu{}_{;\nu}Z^\nu, \end{aligned} \tag{3.34}$$

を得る．

さらに，(3.34) 式の k^μ 方向の微分を取り (3.33), (3.34) 式を使って変形すると

$$\begin{aligned} \frac{D^2Z^\mu}{\partial\lambda^2} &= \left(Z^\mu{}_{;\nu}k^\nu\right)_{;\alpha}k^\alpha = \left(k^\mu{}_{;\nu}Z^\nu\right)_{;\alpha}k^\alpha \\ &= k^\mu{}_{;\nu\alpha}Z^\nu k^\alpha + k^\mu{}_{;nu}Z^\nu{}_{;\alpha}k^\alpha \\ &= k^\mu{}_{;\nu\alpha}Z^\nu k^\alpha + k^\mu_{;\nu}k^\nu{}_{;\alpha}Z^\alpha \\ &= \left(k^\mu{}_{;\nu\alpha} - k^\mu{}_{;\alpha\nu}\right)Z^\nu k^\alpha \\ &= -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}k^\alpha k^\beta Z^\nu, \end{aligned} \tag{3.35}$$

を得る．これが時空の曲率による隣接する測地線間の距離の変化，つまり重力による潮汐現象を支配する測地線偏差方程式である．以下ではこれを，物理的に興味のある時間的測地線束とヌル測地線束に対して適用してみよう．

(a)　時間的測地線束

時間的測地線束の場合，アフィンパラメーターとして一般性を失わずに測地線に沿う固有時間を取ることができるから，$k^\mu k_\mu = -c^2$ としてよい．そこで通常の記号に従って，ここでは $k^\mu = u^\mu$，$\lambda = \tau$ と記す．

まず Z^μ と u^μ との内積の測地線に沿っての変化を考えると，

$$\frac{D}{\partial\tau}\left(g_{\mu\nu}Z^\mu u^\nu\right) = g_{\mu\nu}\frac{DZ^\mu}{\partial\tau}u^\nu = g_{\mu\nu}\frac{Du^\mu}{\partial\sigma}u^\nu = 0,$$

となり，測地線に沿って $g_{\mu\nu}Z^\mu u^\nu$ は一定である．したがって初期に σ を適当に選ぶことによって，一般性を失うことなく

$$g_{\mu\nu}Z^\mu u^\nu = 0, \tag{3.36}$$

とできる．すなわち Z^μ の物理的に意味のある成分は，時間的ベクトル u^μ に垂直な空間的成分のみである．

いま u^μ に直交する空間的方向に三つの単位直交ベクトル $e^\mu_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ を用意し，それらを測地線に沿って平行移動して測地線束全体を張る：

$$g_{\mu\nu}\, e^\mu u^\mu = 0, \qquad g_{\mu\nu}\, e^\mu_{(i)} e^\nu_{(j)} = \delta_{ij}\,, \qquad e^\mu_{(i);\nu}u^\nu = 0. \tag{3.37}$$

三つのベクトル $e^\mu_{(i)}$ の単位直交性が測地線に沿って保たれることは，それらが平行移動によって構成されていることから明らかであろう．このとき，Z^μ は $e^\mu_{(i)}$ を基底として展開することができる：

$$Z^\mu = Z^{(i)}e^\mu_{(i)} \iff Z^{(i)} = g_{\mu\nu}Z^\mu e^\nu_{(i)} = Z^\mu e^{(i)}_\mu\,. \tag{3.38}$$

ここで成分 $Z^{(i)}$ はベクトルの内積を取った結果であるからスカラー量であることに注意しておく．また，添字 (i) はベクトルを区別する単なる指標であるから上つき下つきの区別はない．

空間的単位直交ベクトル $e^\mu_{(i)}$ に加えて $e^\mu_{(0)} = u^\mu/c$ なる時間的単位ベクトルを導入すると，時空をこれら四つの単位直交ベクトル $e^\mu_{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ で張ることができる：

$$g_{\mu\nu}\, e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)} = \eta_{\alpha\beta} \iff g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\, e^{(\alpha)}_\mu e^{(\beta)}_\nu \tag{3.39}$$

このような四つの単位直交ベクトルの組みをテトラッド (tetrad) という．またこれらをベクトルやテンソルを表す非座標基底と見なすことも可能で，その場合はテトラッド基底という．

さて $DZ^\mu/\partial\tau$ と $D^2Z^\mu/\partial\tau^2$ のテトラッド成分を考えると，$e^\mu_{(i);\nu}u^\nu = 0$ であるから

$$e^{(i)}_\mu \frac{DZ^\mu}{\partial\tau} = e^{(i)}_\mu Z^\mu{}_{;\nu}u^\nu = \left(e^{(i)}_\mu Z^\mu\right)_{;\nu} u^\nu = \frac{\partial Z^{(i)}}{\partial\tau}\,,$$
$$e^{(i)}_\mu \frac{D^2Z^\mu}{\partial\tau^2} = e^{(i)}_\mu \left(Z^\mu{}_{;\nu}u^\nu\right)_{;\alpha} u^\alpha = \left(\left(e^{(i)}_\mu Z^\mu\right)_{;\nu} u^\nu\right)_{;\alpha} u^\alpha = \frac{\partial^2 Z^{(i)}}{\partial\tau^2}\,,$$

を得る．したがって (3.34) 式と (3.35) 式のテトラッド成分はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial\tau}Z^{(i)} = e^{(i)}_\mu u^\mu{}_{;\nu} e^\nu_{(j)} Z^{(j)} = u^{(i)}{}_{;(j)} Z^{(j)}, \tag{3.40}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}Z^{(i)} = -\frac{1}{c^2} e^{(i)}_\mu R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta\, e^\nu_{(j)} Z^{(j)} = -R^{(i)}{}_{(0)(j)(0)} Z^{(j)}\,, \tag{3.41}$$

となる．ここで

$$u^{(i)}{}_{;(j)} = u_{(i);(j)} := u_{\mu;\nu} e^\mu_{(i)} e^\nu_{(j)}\,,$$
$$R^{(i)}{}_{(0)(j)(0)} = R_{(i)(0)(j)(0)} := R_{\mu\alpha\nu\beta}\, e^\mu_{(i)} e^\nu_{(j)} e^\alpha_{(0)} e^\beta_{(0)}\,,$$

である．注意すべき点は，τ に関する偏微分が実は見掛け上のものであり，各測地線上で $u^{(i)}{}_{;(j)}$ なり $R^{(i)}{}_{(0)(j)(0)}$ なりを知ることができれば，その測地線に沿って常微分方程式を解くことにより $Z^{(i)}$ の時間発展を求めることができることである．よって (3.40), (3.41) 式を

$$\frac{d}{d\tau}Z^{(i)} = u^{(i)}{}_{;(j)} Z^{(j)}, \tag{3.42}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(i)} = -R^{(i)}{}_{(0)(j)(0)} Z^{(j)}\,, \tag{3.43}$$

のように τ に関する常微分方程式形で表すほうがよい．特にこの後者の式は各測地線上のみの物理量で表された式であり，通常はこの 2 階常微分方程式を解いて $Z^{(i)}$ を求める．前者はその結果を代入することによって $u^{(i)}{}_{;(j)}$ を求めるのに使う．

(b) ヌル測地線束

ヌル測地線束に関しても，時間的測地線束と同様にテトラッドを導入すると便利である．ただ，時間的測地線束との違いは k^μ がヌルであることに対応して

$$g_{\mu\nu}\ell^\mu k^\nu = -1, \qquad g_{\mu\nu}\ell^\mu \ell^\nu = 0, \qquad \ell^\mu{}_{;\nu}k^\nu = 0, \tag{3.44}$$

で与えられるもう一つのヌルベクトル ℓ^μ を基底として導入する点である．よって時空を張る四つの基底ベクトルは，k^μ, ℓ^μ と残る二つの空間的単位直交ベクトル，

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu}\, e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = \delta_{AB}\,, \qquad g_{\mu\nu}\, e^\mu_{(A)} k^\nu = g_{\mu\nu}\, e^\mu_{(A)} \ell^\nu = 0, \\ &e^\mu_{(A);\nu} k^\nu = 0, \quad (A, B = 1, 2), \end{aligned} \tag{3.45}$$

によって構成される．このとき計量は

$$g_{\mu\nu} = -2k_{(\mu}\ell_{\nu)} + \delta_{AB}\, e^{(A)}_\mu e^{(B)}_\nu\,, \tag{3.46}$$

と表される．このような四つの基底ベクトルの組みをヌルテトラッドという．

このヌルテトラッドに対するヤコビ場 Z^μ の成分を考えてみよう．ヤコビ場は隣接する測地線間の距離を表す場であるから，Z^μ の k^μ に比例する成分には意味がない．したがって

$$Z^\mu = Z^* \ell^\mu + Z^{(A)} e^\mu_{(A)}; \quad Z^* = -k_\nu Z^\nu, \tag{3.47}$$

と考えてよい．ここで (3.34) 式の両辺に k_μ を掛けて内積を取ると，時間的測地線束の場合と同様に $d(k_\mu Z^\mu)/d\lambda = 0$ を得る．よって $Z^* = -k_\mu Z^\mu = 0$ としてよい．これから結局 Z^μ の物理的に意味のある成分は $Z^{(A)}$ で表される二つしかないことがわかる．ヌル測地線束として例えば小さな光線の束を考えると，この成分 $Z^{(A)}$ は観測者が光線束を観測するとき，その静止系で光の空間的進行方向に垂直に立てた 2 次元面（スクリーン）に写る光線束の像の縦横の長さを表している．

(3.40), (3.41) 式に対応するヌル測地線束のヤコビ場の発展方程式は

$$\frac{d}{d\lambda} Z^{(A)} = k^{(A)}{}_{;(B)} Z^{(B)}, \tag{3.48}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}Z^{(A)} = -R^{(A)}{}_{(*)(B)(*)}Z^{(B)}, \tag{3.49}$$

$$k^{(A)}{}_{;(B)} := k_{\mu;\nu}\, e^{\mu}_{(A)} e^{\nu}_{(B)}\,, \qquad R^{(A)}{}_{(*)(B)(*)} := R_{\mu\alpha\nu\beta}\, e^{\mu}_{(A)} e^{\nu}_{(B)} k^{\alpha} k^{\beta},$$

で与えられる．ここで (3.43) 式に従って λ に関する偏微分を全微分に書き直した．これらの式は，時空の曲率による光線束の重力レンズ効果を考察するうえでの基礎方程式となる．

問　題

3.1　計量

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^{3} e^{2\alpha_i(t)}(dx^i)^2,$$

に対して測地線方程式を考えることによって，その接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ をすべて求めよ．

3.2　ヌル測地線は計量の共形変換, $g_{ij}(x) \;\to\; \bar{\phi}^2(x)g_{ij}(x)$ に対して不変に保たれることを示せ．

3.3　時間的測地線束に関する方程式 (3.42) に現れる $u^{(i)}{}_{;(j)} = u_{(i);(j)}$ は，一般にその反対称部分，トレースなしの対称部分とトレース部分に一意的に分解できる：

$$u_{(i);(j)} = \omega_{(i)(j)} + \sigma_{(i)(j)} + \frac{1}{3}\delta_{(i)(j)}\theta\,;$$
$$\omega_{(i)(j)} = -\omega_{(j)(i)}\,,\ \sigma_{(i)(j)} = \sigma_{(j)(i)}\,,\ \sigma^{(i)}{}_{(i)} = 0\,.$$

$\omega_{(i)(j)}$, $\sigma_{(i)(j)}$, θ はそれぞれ測地線束の渦度 (vorticity)，歪み (shear), 膨張率 (expansion) を表す．(3.42) 式を微分して (3.43) 式と比較することにより $\omega_{(i)(j)}$, $\sigma_{(i)(j)}$, θ に対する発展方程式を導け．

3.4　ヌル測地線束の (3.48) 式に現れる $k_{(A);(B)}$ に対しても

$$k_{(A);(B)} = \omega_{(A)(B)} + \sigma_{(A)(B)} + \frac{1}{2}\delta_{(A)(B)}\theta\,;$$
$$\omega_{(A)(B)} = -\omega_{(B)(A)}\,,\ \sigma_{(A)(B)} = \sigma_{(B)(A)}\,,\ \sigma^{(A)}{}_{(A)} = 0\,,$$

と一意的に分解できる．問題 3.3 と同様にして $\omega_{(A)(B)}$, $\sigma_{(A)(B)}$, θ に対する発展方程式を導け．

4　曲がった時空上での微積分

曲がった時空上で様々な物理量を計算する際には，ベクトルやテンソルが関係した微分や積分を実行する必要がある．また，その際にしばしば時空のもつ幾何学的対称性に注意することが重要となる．この章では，曲がった時空上で頻繁に使われる微分・積分公式を導出するとともに時空の対称性についても解説する．

4.1　重要な微分演算子

まず前章で考察した共変的なベクトルやテンソルに対する様々な微分計算を実行するうえで知っておくべき重要な微分演算子とそれらに関する公式を与える．

(a)　div $\overrightarrow{V}$

ベクトルの発散の共変的表式は

$$V^{\mu}{}_{;\mu} = V^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} V^{\alpha}, \tag{4.1}$$

である．ここで $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}$ を具体的に計算すると

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\beta} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g_{\beta\mu,\alpha} \, ,$$

となる．ところで一般に行列 A_{ij} の行列式 $\det A_{ij}$ の微分は $\tilde{A}_{ij}$ を成分 A_{ij} に対する余因子行列とすると

$$d \det A_{ij} = \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij} \, dA_{ij} \, ,$$

で与えられ，また逆行列 A^{-1}_{ij} は

$$A^{-1}_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ij}}{\det A},$$

で与えられる．これを計量に適用すると

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}\,; \quad g := \det g_{\mu\nu}\,, \tag{4.2}$$

を得る．ここで慣例に従い g によって計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式を表した．以後もこの表式に従うが g はスカラー量ではないことに注意する必要がある．さて $g<0$ に注意すると

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}g_{\beta\mu,\alpha} = \frac{1}{2}\frac{g_{\alpha}}{g} = \frac{\partial_{\alpha}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\,, \tag{4.3}$$

となる．これを (4.1) 式に代入すると

$$V^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}V^{\mu}\right)\,, \tag{4.4}$$

を得る．この表式はベクトルの発散の簡単な計算手法を与えるだけでなく，それが全微分形で書かれている点が重要である．

一般相対論ではベクトルだけでなくテンソルの発散もしばしば出てくる．2階のテンソルの発散は

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= V^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}V^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}V^{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\left(\sqrt{-g}V^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}V^{\alpha\nu}\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．これからわかるようにテンソルの発散は一般に全微分形にはならない．しかし，$V^{\mu\nu}$ が反対称 ($V^{\mu\nu} = V^{[\mu\nu]}$) なら接続の対称性より全微分形になる：

$$V^{[\mu\nu]}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\left(\sqrt{-g}V^{[\mu\nu]}\right). \tag{4.6}$$

この性質は高階の反対称テンソルの発散に対しても同様に成り立つ．

(b) rot $\overrightarrow{V}$

ベクトルに対する回転を共変的に書くと

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = 2V_{[\mu;\nu]} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}V_{\alpha} - (V_{\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}V_{\alpha})$$
$$= V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu}\,, \tag{4.7}$$

である．これからわかるように共変ベクトルの回転は接続 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ によらず偏微分のみで表される．ただしこの性質が共変ベクトルに対してのみ成り立つことに注意すべきである．例えば

$$V^{\mu;\nu} - V^{\nu;\mu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(V_{\alpha,\beta} - V_{\beta,\alpha}\right)\,,$$

は正しいが,

$$V^{\mu;\nu} - V^{\nu;\mu} \neq V^{\mu,\nu} - V^{\nu,\mu}\left(= 2g^{\alpha[\nu}V^{\mu]}{}_{,\alpha}\right),$$

である．

高階の反対称共変テンソルに対する回転もベクトルの場合と同様に共変微分を偏微分でおき換えることが許される．すなわち，テンソル $V_{\mu\nu} = V_{[\mu\nu]}$, $V_{\mu\nu\alpha} = V_{[\mu\nu\alpha]}$ 等に対して

$$V_{[\mu\nu;\alpha]} = V_{[\mu\nu,\alpha]}\,,$$
$$V_{[\mu\nu\alpha;\beta]} = V_{[\mu\nu\alpha,\beta]}\,, \tag{4.8}$$

が成り立つ．すぐにわかるように，一般に n 次元空間に存在する反対称テンソルの最大の階数は n である．よって 4 次元時空でテンソルの回転が意味をもつのは 3 階の反対称テンソルまでである．

また上の考察からすぐに示せるように，任意の階数の反対称共変テンソルの回転の回転は恒等的にゼロである：

$$V_{\left[[\mu;\nu];\alpha\right]} = V_{[\mu;\nu\alpha]} \equiv 0,$$
$$V_{\left[[\mu\nu;\alpha];\beta\right]} = V_{[\mu\nu;\alpha\beta]} \equiv 0. \tag{4.9}$$

上でみたようにベクトルやテンソルの回転は接続によらない．実は回転は微分幾何学で外微分 (exterior derivative) と呼ばれているものに対応し，ℓ 階の

反対称共変テンソルを $\ell+1$ 階の反対称共変テンソルに写像する，共変微分と独立な微分演算子として定義される．これについて少し触れておこう．

一般に ℓ 階の反対称共変テンソルは ℓ-形式 (ℓ-form) と呼ばれ，スカラーは 0-形式，共変ベクトルは 1-形式と呼ばれる．これらのテンソルの集合を微分形式 (differential form) といい，外微分を $\boldsymbol{d}$ で表す．例えばスカラー φ に対する外微分は

$$\boldsymbol{d}\varphi = \varphi_{,\mu}\boldsymbol{dx}^{\mu}, \tag{4.10}$$

で与えられる．ここで $\boldsymbol{dx}^{\mu}$ はベクトルの座標基底 $\overrightarrow{e}_{\mu}$ に対して

$$\boldsymbol{dx}^{\mu}(\overrightarrow{e}_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu}, \tag{4.11}$$

によって定義される 1-形式の座標基底であり，2.2 節で $\boldsymbol{\omega}^{i}$ と呼んだものと同一である．またそこでも触れたことだが，(4.10) 式からもわかるように $\boldsymbol{dx}^{\mu}$ は物理的には座標の無限小変位 dx^{μ} を表すと解釈してよい．1-形式 $\boldsymbol{V} = V_{\mu}\boldsymbol{dx}^{\mu}$ や 2-形式 $\boldsymbol{W} = W_{\mu\nu}\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu}$ に対する外微分は

$$\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{d}(V_{\mu})\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu} = V_{\mu,\nu}\boldsymbol{dx}^{\nu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}, \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{dW} = \boldsymbol{d}(W_{\mu\nu})\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu} = W_{\mu\nu,\alpha}\boldsymbol{dx}^{\alpha}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu}, \tag{4.13}$$

で定義される．ここで $\boldsymbol{dx}^{\nu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}$ と $\boldsymbol{dx}^{\alpha}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu}$ はそれぞれ 2-形式と 3-形式の基底で添字に関して反対称な共変テンソルの基底である：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dx}^{\nu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu} &= \boldsymbol{dx}^{\nu}\otimes\boldsymbol{dx}^{\mu} - \boldsymbol{dx}^{\mu}\otimes\boldsymbol{dx}^{\nu},\\ \boldsymbol{dx}^{\alpha}\wedge\boldsymbol{dx}^{\mu}\wedge\boldsymbol{dx}^{\nu} &= 3!\ \boldsymbol{dx}^{[\alpha}\otimes\boldsymbol{dx}^{\mu}\otimes\boldsymbol{dx}^{\nu]}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

高階の微分形式についても同様である．また，この外微分の定義に従って (4.10) 式や (4.12) 式の外微分をもう一度とると恒等的にゼロになることがわかる．これは (4.9) 式に対応しており，外微分 $\boldsymbol{d}$ が作用する対象にかかわらず $\boldsymbol{dd}\equiv 0$ なる性質をもっていることを示している．

(c)　$\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\,(=\Delta\varphi)$

これは一般にラプラシアン (Laplacian) と呼ばれているが，スカラー量に対するその共変形は

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}\varphi^{;\mu}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi\right), \tag{4.15}$$

で与えられる．ラプラシアンは通常の空間では Δ で表されるが，時空に対しては $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ でこの演算を表しダランベルシャン (d'Alembertian) という．

ラプラシアンのベクトルやテンソルに対する演算の一般化の一つとしてラプラス・ベルトラミ (Laplace-Beltrami) 演算と呼ばれているものがあり，それはベクトルや反対称テンソルの回転に対する発散で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\left(V^{\mu;\nu} - V^{\nu;\mu}\right)_{;\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\left(V^{\mu;\nu} - V^{\nu;\mu}\right)\right), \\
V^{[\mu\nu;\alpha]}{}_{;\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha \left(\sqrt{-g} V^{[\mu\nu;\alpha]}\right).
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

特にベクトルに対してはリーマンテンソルの定義から

$$
\begin{aligned}
\left(V^{\mu;\nu} - V^{\nu;\mu}\right)_{;\nu} &= V^{\mu;\nu}{}_{;\nu} - V^{\nu;\mu}{}_{;\nu} \\
&= \Box V^\mu - (V^\nu{}_{;\nu})^{;\mu} - R^\mu{}_\nu V^\nu ,
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

とも表される．

(d) リー微分

一般相対論でしばしば現れるもう一つの微分にリー微分 (Lie derivative) がある．リー微分はベクトルやテンソルを時空上の 1 パラメーター曲線に沿って運動させたときに，その無限小運動に対する変化として定義される．いま，時空上の点 P のまわりに座標 $\{x^\mu\}$ を張り，点 P を始点とし実数 t をパラメーターとする 1 パラメーター曲線 $x^\mu_{P(t)} = f^\mu(t)$ を考え，この曲線に沿っての共変ベクトル A_μ の無限小運動を考えよう．ここで曲線上のパラメーター t に対応する点を $P(t)$，始点を $P = P(0)$ とし，この曲線の接ベクトルを $\xi^\mu = df^\mu/dt$ とする．共変ベクトルの座標不変な表式は

$$
A_\mu(x) dx^\mu, \tag{4.18}
$$

である．これを点 P から接ベクトル ξ^μ の方向へパラメーター距離 $t = \epsilon$ だけ無限小運動させると $x^\mu_{P(\epsilon)} = x^\mu_P + \epsilon \xi^\mu_P$ であるから，

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x_{P(\epsilon)}) dx^\mu_{P(\epsilon)} &= A_\mu(x + \epsilon\xi) d(x^\mu + \epsilon\xi^\mu) \\
&= A_\mu(x) dx^\mu + \epsilon\left(A_{\mu,\nu}\xi^\nu + \xi^\nu{}_{,\mu} A_\nu\right) dx^\mu + O(\epsilon^2),
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

を得る．ここで記号の簡単化のため添字の P を省いた．これともとの (4.18) 式との差を取り ϵ で割って $\epsilon \to 0$ の極限を取ったものを A_μ の ξ^μ 方向へのリー微分といい，$\mathcal{L}_\xi A_\mu$ で表す：

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu := A_{\mu,\nu}\xi^\nu + \xi^\nu{}_{,\mu}A_\nu \,. \tag{4.20}$$

この定義からわかるようにリー微分は共変微分とは独立の概念であり，接続 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ によらない．しかし $\mathcal{L}_\xi A_\mu$ はやはり共変テンソルでありリーマン空間では偏微分を共変微分でおき換えてもよい：

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = A_{\mu;\nu}\xi^\nu + \xi^\nu{}_{;\mu}A_\nu \,. \tag{4.21}$$

上ではリー微分を無限小の運動による変化分として定義したが，それと等価な定義としてリー微分を無限小座標変換によって誘起される変化分と考えることもできる．いま (4.19) 式において考えた無限小運動の代わりに座標変換，

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu, \tag{4.22}$$

を考えると

$$\bar{A}_\mu(x+\epsilon\xi)d(x^\mu+\epsilon\xi^\mu) = A_\mu(x)dx^\mu,$$

である．この座標変換によって誘起される A_μ の無限小変分を $\epsilon\,\delta_\xi A_\mu$ とおくと

$$\begin{aligned}\delta_\xi A_\mu(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\bar{A}_\mu(x)-A_\mu(x)}{\epsilon} = -\left(A_{\mu,\nu}\xi^\nu + \xi^\nu{}_{,\mu}A_\nu\right)\\ &= -\,\mathcal{L}_\xi A_\mu \,,\end{aligned} \tag{4.23}$$

を得る．このように $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\xi^\mu$ を運動と見ても座標変換と見てもその変化分は符号を除いて全く同じである．符号が逆になる理由は $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\xi^\mu$ を運動と見るともとの点 x^μ には始めに $x^\mu - \epsilon\xi^\mu$ にあった点が移動して来ており，これは座標変換 $\bar{x}^\mu = x^\mu - \epsilon\xi^\mu$ に対応しているからである．

スカラー量に対するリー微分は単なる ξ^μ 方向への微分で与えられる：

$$\mathcal{L}_\xi \varphi = \varphi_{,\mu}\xi^\mu = \varphi_{;\mu}\xi^\mu. \tag{4.24}$$

リー微分にもやはりライプニッツ則を満たすことを要請する．すると例えば

$$\mathcal{L}_\xi(A_\mu B^\nu) = B^\nu\,\mathcal{L}_\xi A_\mu + A_\mu\,\mathcal{L}_\xi B^\nu \,.$$

これより反変ベクトルのリー微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi B^\mu &= B^\mu{}_{,\nu}\xi^\nu - \xi^\mu{}_{,\nu}B^\nu \\ &= B^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu - \xi^\mu{}_{;\nu}B^\nu \\ &= [B,\xi]^\mu ,\end{aligned} \tag{4.25}$$

で与えられる．この最後の等式では 4.4 節の (4.80) 式で定義するかぎ括弧演算を用いて表した．4.4 節で具体的な例を挙げるが，数学的にはこのかぎ括弧はリー環の要素に対する演算子になっている．実は，微分幾何学では反変ベクトルに対するリー微分が最初に定義される．滑らかな座標変換によって結び付く二つの空間を微分同相 (diffeomorphism) という．そこで可能なすべての座標変換が作る群を微分同相群と呼べば，リー微分は微分同相群の（無限次元の）環の代数を与えているといえる．

高階のテンソルに対するリー微分も上と同様に定義される．特に計量 $g_{\mu\nu}$ に対するリー微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\xi^\alpha{}_{,\nu} + g_{\nu\alpha}\xi^\alpha{}_{,\mu} \\ &= \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} ,\end{aligned} \tag{4.26}$$

である．

4.2　時空上での積分

時空上に分布する物理量に関しては，その全空間での積分量が対象となる系を理解するうえでしばしば重要となる．ここでは，まず平坦な空間の場合から始めて，曲がった時空上での積分の座標不変な定義を考察する．

(a)　3 次元ユークリッド空間

3 次元ユークリッド空間における線積分をまず考えよう．ある曲線 ℓ に沿う積分の線要素 $d\overrightarrow{\ell}$ は $d_1\overrightarrow{x}$ を ℓ に接する無限小ベクトルとすると，明らかに

$$d\overrightarrow{\ell} = d_1\overrightarrow{x} ,$$

である．また成分で表示すれば

$$d\ell^i = d_1 x^i\,, \tag{4.27}$$

である．

次に無限小のベクトル $d_1\vec{x}, d_2\vec{x}$ によって張られる面積要素 $d\vec{S}$ は，よく知られているように

$$d\vec{S} = \vec{n}\,dS = d_1\vec{x} \times d_2\vec{x}\,; \quad dS = \vec{n}\cdot d\vec{S}\,,$$

で与えられる（図 4.1）．ここで $\vec{n}$ は $d_1\vec{x} \times d_2\vec{x}$ に比例した面に垂直な単位ベクトルである．この表式をデカルト座標でその成分をあらわにして書けば

$$dS_i = n_i dS = \epsilon_{ijk}\, d_1x^j d_2x^k; \quad dS = n^i \epsilon_{ijk}\, d_1x^j d_2x^k, \tag{4.28}$$

となる．ここで ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{[ijk]}\,, \qquad \epsilon_{123} = 1, \tag{4.29}$$

で与えられる（3 次元ユークリッド空間上の）完全反対称テンソルである．その符号は空間の向きづけを決めるが，$\epsilon_{123} = -1$ ではなく $\epsilon_{123} = 1$ と取ったことを便宜上右手系と定義する．

完全反対称テンソル ϵ_{ijk} の性質から

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{\ell mn} &= \delta^i_\ell \delta^j_m \delta^k_n + \delta^i_m \delta^j_n \delta^k_\ell + \delta^i_n \delta^j_\ell \delta^k_m \\ &\quad - \delta^i_\ell \delta^j_n \delta^k_m - \delta^i_m \delta^j_\ell \delta^k_n - \delta^i_n \delta^j_m \delta^k_\ell \\ &= 3!\, \delta^{[i}_\ell \delta^j_m \delta^{k]}_n\,,\end{aligned} \tag{4.30}$$

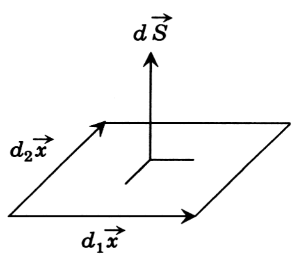


図 4.1

が成り立つ．またここで添字 k, n に関して縮約を取ると

$$\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{\ell mk} = 2\,\delta_\ell^{[i}\delta_m^{j]},$$

を得る．これを使うと

$$dS^{ij} := \epsilon^{ijk}\,dS_k = 2\,d_1x^{[i}d_2x^{j]}, \tag{4.31}$$

を得る．このように面積要素は 2 階の反対称テンソル dS^{ij} と等価である．

一方無限小ベクトル $d_1\overrightarrow{x}, d_2\overrightarrow{x}, d_3\overrightarrow{x}$ によって張られる体積要素 dV は

$$dV = \left(d_1\overrightarrow{x} \times d_2\overrightarrow{x}\right) \cdot d_3\overrightarrow{x},$$

であり，その成分表示は

$$dV = \epsilon_{ijk}d_1x^i d_2x^j d_3x^k, \tag{4.32}$$

で与えられる（図 4.2）．体積要素もまた空間の向きづけに従って正にも負にもなりうる．また，面積要素と同様に (4.30) 式を使うと

$$dV^{ijk} := \epsilon^{ijk}dV = 3!\,d_1x^{[i}d_2x^j d_3x^{k]}, \tag{4.33}$$

を得る．よって体積要素は 3 階の完全反対称テンソル dV^{ijk} と等価である．

1 次元の線要素，2 次元の面積要素，3 次元の体積要素のそれぞれに対する (4.27), (4.31), (4.33) の表式から予想されるように，一般に積分要素はそれぞれベクトル，2 階の反対称テンソル，3 階の反対称テンソルというように（ベクトルを 1 階の反対称テンソルと考えれば）それぞれの積分次元に対応した反対称テンソルで表すことができる．これは任意の n 次元空間で成り立つ積分の性質である．

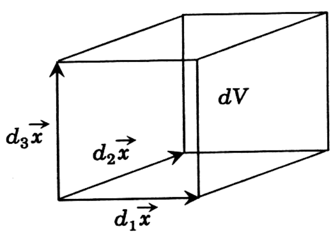


図 4.2

(b) 4 次元ミンコフスキー時空

上の 3 次元ユークリッド空間の例でもわかるように，与えられた空間での面積要素や体積要素の定義にはその次元数の添字をもつ単位完全反対称テンソルが重要な役割を果たす．4 次元ミンコフスキー時空に通常のデカルト的座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) を張ると，単位完全反対称テンソルは

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \epsilon_{[\mu\nu\alpha\beta]}\,, \qquad \epsilon_{0123} = 1, \tag{4.34}$$

で与えられる．3 次元ユークリッド空間と同様にこの ϵ_{0123} の符号の選択を 4 次元時空の右手系と便宜上定義する．$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の添字を上げたもの，$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ はミンコフスキー時空の計量の時間成分が $\eta_{00} = -1$ であるから

$$\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1, \tag{4.35}$$

となることに注意すべきである．また (4.30) 式に対応する $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の式は (4.35) 式に注意すると

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!\;\delta_\mu^{[\alpha}\delta_\nu^{\beta}\delta_\rho^{\gamma}\delta_\sigma^{\delta]}\,, \tag{4.36}$$

である．

ミンコフスキー時空でも線積分に対する線要素 $d\ell^\mu$ はユークリッド空間とまったく同様にその曲線に接する無限小ベクトル d_1x^μ に等しい：

$$d\ell^\mu = d_1x^\mu\,. \tag{4.37}$$

また，無限小ベクトル d_1x^μ, d_2x^μ によって張られる 2 次元面の面積要素は n_μ, s_μ をこの面に垂直な互いに直交する単位ベクトルとすると，

$$\begin{aligned} &d\sigma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^\alpha d_2x^\beta = \mp n_{[\mu}s_{\nu]}dS\,; \quad dS = n^\mu s^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^\alpha d_2x^\beta, \\ &n_\mu n^\mu = \mp 1, \end{aligned} \tag{4.38}$$

で与えられる．ここで一般性を失わずに s_μ は空間的単位ベクトル ($s_\mu s^\mu = 1$), n_μ は時間的 ($n_\mu n^\mu = -1$) または空間的単位ベクトル ($n_\mu n^\mu = 1$) とし，$(n^\mu, s^\mu, d_1x^\mu, d_2x^\mu)$ がこの順で右手系をなすとした．ユークリッド空間と同様に $d\sigma_{\mu\nu}$ をそれと等価な 2 階の反対称テンソル,

$$dS^{\mu\nu} := -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta} = 2\,d_1x^{[\mu}d_2x^{\nu]}, \tag{4.39}$$

によって面積要素を表すこともできる．ここで (4.36) 式の 2 組の添字に関して

縮約を取った等式，

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -4\,\delta_\rho^{[\mu}\delta_\sigma^{\nu]}\,,$$

を使った．

一般に n 次元空間中の $(n-1)$ 次元の面のことを超曲面 (hypersurface) という．4 次元ミンコフスキー時空で無限小ベクトル d_1x^μ, d_2x^μ, d_3x^μ によって張られる 3 次元超曲面の面積要素は

$$d\Sigma_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta = \mp n_\mu d\Sigma\,;\quad d\Sigma = n^\mu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta, \tag{4.40}$$

で与えられる．ここで n_μ は超曲面 $d\Sigma$ に垂直な単位ベクトルであり，空間的超曲面に対しては $n_\mu n^\mu = -1$，時間的超曲面に対しては $n_\mu n^\mu = 1$ である．さらに空間的超曲面に対しては未来を向いた超曲面 $(n^0 > 0)$ と過去を向いた超曲面 $(n^0 < 0)$ とがある．またこの場合も $d\Sigma_\mu$ と等価な 3 階反対称テンソル $d\Sigma^{\mu\nu\alpha}$ が存在する．(4.36) 式の一組の添字に関して縮約を取った式を使うとそれは

$$\begin{aligned} d\Sigma^{\mu\nu\alpha} &:= \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,d\Sigma_\beta \\ &= 3!\,d_1x^{[\mu}d_2x^\nu d_3x^{\alpha]}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

で与えられる．

無限小ベクトル d_0x^μ, d_1x^μ, d_2x^μ, d_3x^μ で張られる 4 次元時空の体積要素 dV は

$$dV = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_0x^\mu d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta\,, \tag{4.42}$$

である．この場合も dV と等価な 4 階の完全反対称テンソル $dV^{\mu\nu\alpha\beta}$ は (4.36) 式を使って

$$\begin{aligned} dV^{\mu\nu\alpha\beta} &:= -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,dV \\ &= 4!\,d_0x^{[\mu}d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^{\beta]}\,, \end{aligned} \tag{4.43}$$

で与えられる．

上で与えた積分要素に基づいて具体的に積分を実行するためには，それらを座標の体積要素を使って表す必要がある．そこで無限小ベクトル $d_\alpha x^\mu$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ がそれぞれ

$$
\begin{aligned}
d_0 x^\mu &= (dx^0, 0, 0, 0), \\
d_1 x^\mu &= (0, dx^1, 0, 0), \\
d_2 x^\mu &= (0, 0, dx^2, 0), \\
d_3 x^\mu &= (0, 0, 0, dx^3),
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

のように座標の無限小変位で与えられる場合を考えよう．このとき (4.38) 式で与えられる 2 次元面の面積要素は $t^\mu = (1,0,0,0)$，$s^\mu = (0,0,0,1)$ より

$$
dS = \epsilon_{0312}\, dx^1 dx^2 = dx^1 dx^2,
$$

となり，通常のデカルト座標に対する面要素を得る．また (4.40) 式で与えられる超曲面の面積要素は $n^\mu = (1,0,0,0)$ より

$$
d\Sigma = \epsilon_{0\nu\alpha\beta}\, d_1 x^\nu d_2 x^\alpha d_3 x^\beta = dx^1 dx^2 dx^3,
$$

となり，馴染みの時間座標 $x^0 =$一定の空間的 3 次元体積要素を与える．さらに (4.42) 式の体積要素も

$$
dV = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3,
$$

となり，よく見かける形となる．

(c) 一般の 4 次元時空

一般の 4 次元時空も局所的にはミンコフスキー時空と区別がつかないのであるから，その面積要素や体積要素も基本的には (b) のミンコフスキー時空の場合と同様にして与えられる．すなわち (4.37) 式と (4.38), (4.40), (4.42) の各式，あるいは (4.39), (4.41), (4.43) の各式はそのまま一般座標系で成り立つ．唯一の問題はミンコフスキー時空での完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の表式が一般の時空では局所ローレンツ系でのみ正しいという点である．そこで $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の一般座標での形を求めよう．

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ がテンソルであるためには座標変換 $x^\mu \to \bar{x}^\mu$ で

$$
\bar{\epsilon}_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\partial x^{\nu_0}}{\partial \bar{x}^{\mu_0}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^{\mu_2}} \frac{\partial x^{\nu_3}}{\partial \bar{x}^{\mu_3}} \epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}\,, \tag{4.45}
$$

と変換しなければならない．これより特に $\mu_0 = 0$，$\mu_1 = 1$，$\mu_2 = 2$，$\mu_3 = 3$

とおけば,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_{0123} &= \frac{\partial x^{\nu_0}}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^{\nu_3}}{\partial \bar{x}^3}\epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&= \frac{\partial x^{[\nu_0}}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^{\nu_3]}}{\partial \bar{x}^3}\epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&= 4!\,\frac{\partial x^{[0}}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial x^{1}}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^{2}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^{3]}}{\partial \bar{x}^3}\epsilon_{0123} \\
&= \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)\frac{\partial x^{\sigma(0)}}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^{\sigma(2)}}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^{\sigma(3)}}{\partial \bar{x}^3}\epsilon_{0123}\,,
\end{aligned}$$

と変形される．ここで σ は添字 0, 1, 2, 3 に関する置換を表し，$\mathrm{sign}(\sigma)$ は σ が偶置換なら $+1$，奇置換なら -1 となる置換の符号，和 $\sum_\sigma$ はすべての可能な置換についての和である．これは行列 $(\partial x^\nu/\partial \bar{x}^\mu)$ の行列式にほかならない．よって

$$\bar{\epsilon}_{0123} = \det\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\epsilon_{0123}\,, \tag{4.46}$$

を得る．

一方，計量の行列式の座標変換を考えると

$$\det(\bar{g}_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\right)^2\det(g_{\alpha\beta}),$$

であるから $\sqrt{-g}$ の変換則として

$$\sqrt{-\bar{g}} = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\sqrt{-g}\,, \tag{4.47}$$

を得る．ここで座標変換によって時空の向きづけは変わらない，すなわち $\det(\partial x^\alpha/\partial \bar{x}^\mu) > 0$ とした．

(4.46) 式と (4.47) 式を比較すると α を座標によらないスカラー量として

$$\epsilon_{0123} = \alpha\sqrt{-g},$$

と書けることがわかる．ここで局所ミンコフスキー座標に移って考えると，そこでは $\sqrt{-g} = 1$，$\epsilon_{0123} = 1$ であるから $\alpha = 1$ でなければならない．よって $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の共変形として

$$\epsilon_{0123} = \sqrt{-g}\,, \qquad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \epsilon_{[\mu\nu\alpha\beta]}\,, \tag{4.48}$$

を得る．

(d)　座標不変な積分

上の結果を使って座標不変な 4 次元時空上，3 次元超曲面上，2 次元面上の積分を考察しよう．まず 4 次元時空上の積分を考える．一般の座標 $\{x^\mu\}$ に対して計量を $g_{\mu\nu}$ とすると，(4.44) 式で与えられる積分要素に対して時空の 4 次元不変体積要素は

$$dV = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3,$$

となる．これが dV の座標表示である．以後簡単のため，座標の体積要素 $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ を d^4x で表し，不変体積要素 dV を

$$dV = \sqrt{-g}\, d^4x\,, \tag{4.49}$$

と記す．

一般に時空上のある領域にわたる積分は座標の取り方によってはならないから，積分はスカラー関数に対してのみ意味をもつ．これは非常に重要な事実であって，一般にベクトルやテンソルの積分には座標不変な意味がないことを常に覚えておくべきである．ある関数 $\varphi(x)$ の領域 V での積分は

$$\int_V \varphi\, dV = \int_V \varphi(x)\sqrt{-g} d^4x\,, \tag{4.50}$$

で与えられる．また，これは φ と等価な完全反対称共変テンソル

$$\varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\varphi\,, \tag{4.51}$$

を使うと (4.43) 式より

$$\int_V \varphi\, dV = \int_V \varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta}\, dV^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.52}$$

とも書ける．このように積分要素を $dV^{\mu\nu\alpha\beta}$ で表す場合には，積分は完全反対称テンソルに対してのみ意味をもつ．もちろん (4.50) 式と (4.52) 式は等価な積分の定義である．$\varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta}$ を φ に双対 (dual) なテンソルという．

次に 3 次元超曲面上の積分を考えよう．一般にある 3 次元超曲面 Σ が三つのパラメーター σ^i $(i=1,2,3)$ によって $x^\mu = x^\mu(\sigma^i)$ で与えられるとき，σ^i は Σ 面上の座標を与え，その面上に誘起される計量 h_{ij} は

$$ds_\Sigma^2 = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^j}d\sigma^i d\sigma^j = h_{ij}d\sigma^i d\sigma^j, \tag{4.53}$$

で与えられる．一般相対論において 3 次元超曲面上の積分として最も頻繁に現れるのはある空間的超曲面 Σ 上の積分である．そこでいまこの超曲面が時間一定面 (x^0 =定数) となるように座標を取り $x^i = \sigma^i$ とする．すると

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^j} = g_{ij}\,,$$

である．一方行列の逆行列の構成法から

$$g^{00} = \frac{\det g_{ij}}{\det g_{\mu\nu}} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{\mu\nu}} = \frac{h}{g}\,, \tag{4.54}$$

を得る．ここで g と同様 h によって計量 h_{ij} の行列式を表した．

ところで Σ に垂直な単位ベクトル n_μは $n_\mu dx^\mu \propto dx^0$ であるから

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0),$$

と表される．ここで便宜上 Σ は未来を向いた超曲面，すなわち $n^0 = g^{0\mu}n_\mu = g^{00}n_0 > 0$ であるとした．このとき $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = -1$ より $g^{00} = -1/N^2$ を得る．よって

$$n^0 = g^{00}n_0 = \frac{1}{N}\,,$$

である．

以上により Σ 上の面積要素は

$$\begin{aligned} d\Sigma &= n^\mu \epsilon_{\mu 123}\, dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= n^0 \epsilon_{0123}\, dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{N}\sqrt{-g}\, d^3x\,, \end{aligned} \tag{4.55}$$

で与えられる．ここで体積要素の場合と同様に $d^3x = dx^1dx^2dx^3$ によって 3 次元空間の座標体積要素を表した．以後も一般に n 次元の座標体積要素を d^nx と記す．また，(4.54) 式と等式 $g^{00} = -1/N^2$ を考慮すると $d\Sigma$ は

$$d\Sigma = \sqrt{h}\, d^3x\,, \tag{4.56}$$

とも表される．これは確かに 3 次元超曲面 Σ 上の不変体積要素になっている．Σ が時間的超曲面の場合は $h<0$ であるから (4.56) 式の代わりに

$$d\Sigma = \sqrt{-h}\, d^3x\,, \tag{4.57}$$

とすればよい．

3 次元超曲面上の積分もやはり時空の座標の取り方によってはならない．よって 4 次元時空で定義された量で 3 次元超曲面上で積分できるのはベクトルのみである．すなわち，あるベクトル V^μ に対して超曲面 Σ 上の積分は

$$\int_\Sigma V^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma (\mp n_\mu V^\mu)\sqrt{|h|}d^3x\,, \qquad n_\nu n^\nu = \mp 1, \tag{4.58}$$

で与えられる．この場合もまた面積要素を (4.41) 式を使って $d\Sigma^{\mu\nu\alpha}$ で表せば，

$$\int_\Sigma V^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma V^*_{\mu\nu\rho}\, d\Sigma^{\mu\nu\rho}\,; \quad V^*_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}V^\alpha, \tag{4.59}$$

を得る．よって超曲面上の積分を 3 階の反対称共変テンソルに対して定義することができる．このときも $V^*_{\mu\nu\alpha}$ を V^μ に双対なテンソルという．

2 次元面の場合も上と同様の議論を繰り返すことによって求めることができる．簡単のため 2 次元面 S を x^0 =一定，x^3 =一定の空間的 2 次元面とし，$n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$，$s_\mu = (0, 0, 0, M)$ とする．さらに $x^A = (x^1, x^2)$ を S 上の座標とすると，その計量 H_{AB} は

$$ds_S^2 = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^A}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^B}dx^A dx^B = h_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^A}\frac{\partial x^j}{\partial x^B}dx^A dx^B = H_{AB}dx^A dx^B,$$

で与えられる．よって $H_{AB} = h_{AB}$ である．また，$n^0 = 1/N$，$s^3 = 1/M$ より

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} = NM\sqrt{H}\,; \quad H = \det H_{AB}\,,$$

である．したがって

$$dS = \frac{\sqrt{h}}{M}\,dx^1 dx^2 = \sqrt{H}\,d^2x\,, \tag{4.60}$$

を得る．単位ベクトル n^μ と s^μ の両方が空間的な場合には S が時間的 2 次元面となり，

$$dS = \sqrt{-H}\,d^2x\,, \tag{4.61}$$

である．

2 次元面上の積分は 2 階の反対称テンソル $A^{\mu\nu} = A^{[\mu\nu]}$ に対してのみ意味をもつ．すなわち，

$$\int_S A^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \int_S (\pm A^{\mu\nu} n_\mu s_\nu) dS\,; \quad n_\alpha n^\alpha = \pm 1,$$

である．この場合も $A^{\mu\nu}$ に双対な反対称共変テンソル $A^*_{\mu\nu}$ を導入することによって積分を

$$\int_S A^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \int_S A^*_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\,; \quad A^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} A^{\alpha\beta}, \tag{4.62}$$

と書き直すことができる．

最後に線積分に関して一言述べておこう．曲線 ℓ に沿っての線積分はその接ベクトルの一般座標 $\{x^\mu\}$ に対する成分を dx^μ/dt とすれば

$$d\ell^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} dt\,,$$

であるから

$$\int_\ell V_\mu d\ell^\mu = \int_\ell V_\mu dx^\mu, \tag{4.63}$$

と書ける．これから明らかに線積分の場合は初めから共変ベクトルに対して積分が定義されている．

以上からわかるように n 次元の積分を n 階の反対称共変テンソルに対して定義しておけば，その定義は初めから統一的かつ不変的である．さらにこの場合の定義をよく見直してみると積分が計量テンソルに依存せずに定義されていることがわかる．すなわち多様体上に計量不変な積分が存在する．このように反対称共変テンソルの集合，微分形式は微分幾何学において重要な役割を果たす．

4.3 ガウスの定理とストークスの定理

電磁気学において中心的な役割を果たす数学的定理にガウスの定理 (Gauss' theorem) とストークスの定理 (Stokes' theorem) がある．これらは電磁気学に限らず物理量が場の量で表されているとき，そして場の量に何らかの保存則が存在するときには常に重要な役割を担う．

まずよく知られた 3 次元ユークリッド空間の場合を復習しておこう．ガウスの定理は

$$\int_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}\,dV = \int_{\partial V} \overrightarrow{A}\cdot d\,\overrightarrow{S}, \tag{4.64}$$

で与えられる．ここで V はある閉じた 3 次元体積，∂V はその境界の 2 次元面である（図 4.3）．また，ストークスの定理は

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A})\cdot d\,\overrightarrow{S} = \int_{\partial S} \overrightarrow{A}\cdot d\,\overrightarrow{\ell}, \tag{4.65}$$

で与えられる．ここで S は境界をもつ閉じた 2 次元面，∂S はその境界曲線である（図 4.4）．これらの定理の共変的表式を考えると実はこれらが共通の数学的定理の別の表現になっている．そしてそれらはストークスの定理の一般化であって，ガウスの定理はその特殊な場合に対応していることがわかる．そこでまずストークスの定理から始めてガウスの定理の共変的表式を導こう．

(4.65) 式を成分表示すると

$$\int_S A_{[i,j]}dS^{ji} = \int_{\partial S} A_i d\ell^i,$$

である．ここで $d\ell^i$ と dS^{ij} はそれぞれ (4.27) 式と (4.31) 式によって与えられている．この表式からわかるようにストークスの定理には空間の計量はどこにも現れていない（共変ベクトルの回転は接続によらないことを思い起こしてほしい）．特にデカルト的座標を取る必要はなく一般座標で考えてもまったく問題はない．さらに 2 次元面 S はユークリッド空間内に存在する必要もなく，S と同じ位相をもち同じ座標で張ることのできる面（すなわち S と微分同相）ならば任意の空間内で成り立つ．よって特に一般の 4 次元時空においてもまったく同

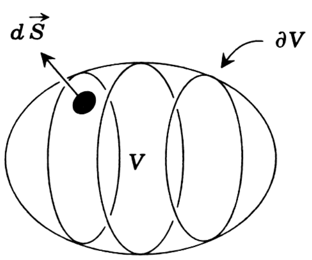


図 4.3

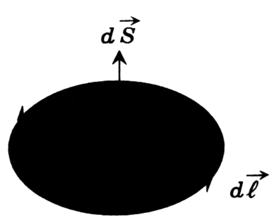


図 4.4

様に成立する．すなわち，

$$\int_S A_{[\mu,\nu]} dS^{\nu\mu} = \int_{\partial S} A_\mu d\ell^\mu, \tag{4.66}$$

を得る．

ストークスの定理は 2 次元面とその境界線に対してのみでなく，任意の高次元の閉じた領域に対しても同様に成り立つ．よって 4 次元時空では閉じた 3 次元超曲面 Σ とその境界 2 次元面 $\partial\Sigma$，4 次元時空の閉領域 V とその境界 3 次元超曲面 ∂V に対しても同様に成り立つ：

$$\int_\Sigma A_{[\mu\nu,\alpha]} d\Sigma^{\alpha\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma} A_{[\mu\nu]} dS^{\mu\nu}, \tag{4.67}$$

$$\int_V A_{[\mu\nu\alpha,\beta]} dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} A_{[\mu\nu\alpha]} d\Sigma^{\mu\nu\alpha}. \tag{4.68}$$

ここでストークスの定理の一つの重要な帰結について一言指摘しておく．(4.67) 式と (4.68) 式において $\partial V = \Sigma$，$\partial\partial V = \partial\Sigma$，$A_{[\mu\nu\alpha]} = A_{[\mu\nu,\alpha]}$ とおくと

$$\int_V A_{[\mu\nu,\alpha\beta]} dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} A_{[\mu\nu,\alpha]} d\Sigma^{\alpha\mu\nu} = \int_{\partial\partial V} A_{[\mu\nu]} dS^{\mu\nu},$$

を得る．ところが $A_{[\mu\nu,\alpha\beta]} \equiv 0$ であるからこの最右辺は $A_{[\mu\nu]}$ によらずに恒等的にゼロのはずである．これは $\partial\partial V = \emptyset$, すなわち任意の 4 次元閉領域 V の境界の境界はゼロ集合であることを意味している．まったく同様にして (4.66) 式と (4.67) 式において $\partial\Sigma = S$，$\partial\partial\Sigma = \partial S$，$A_{[\mu\nu]} = A_{[\mu,\nu]}$ とおくと $A_{[\mu,\nu\alpha]} \equiv 0$ より $\partial\partial\Sigma = \emptyset$ を得る．このように反対称共変テンソルの回転の回転が恒等的にゼロであるという事実は任意次元の閉領域の境界の境界がゼロであるという大局的な位相構造と深く結び付いている．

さて，ガウスの定理の共変形を導こう．前節で積分には二つの等価な定義が存在することをみた．この事実を使って 4 次元時空領域に対するストークスの定理 (4.68) を書き換えよう．いま

$$A^\beta := \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\mu\nu\alpha}, \tag{4.69}$$

によってベクトル A^β を定義すると (4.36) 式を使って

$$A_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} A^\rho, \tag{4.70}$$

を得る．すなわち A^μ は $A_{\mu\nu\alpha}$ に双対なベクトルである．これを (4.68) 式に代入し $A_{[\mu\nu\alpha,\beta]} = A_{[\mu\nu\alpha;\beta]}$ の事実に注意すると

$$\int_V \frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, A^\rho{}_{;\beta}\, dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} \frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, A^\rho\, d\Sigma^{\mu\nu\alpha},$$

となる．ここで (4.41) 式と (4.43) 式より

$$\frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, dV^{\beta\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, \epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} dV = \delta^\beta_\rho\, dV,$$
$$\frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, d\Sigma^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} d\Sigma_\beta = d\Sigma_\rho\,,$$

であることを使うと結局,

$$\int_V A^\mu{}_{;\mu} dV = \int_{\partial V} A^\mu d\Sigma_\mu\,, \tag{4.71}$$

を得る．これが 4 次元時空におけるガウスの定理の共変的表式である．上の導出過程からわかるように，ストークスの定理は時空の計量によらないが，ガウスの定理には計量テンソルが存在していることが本質的である．

時空の計量が本質的であるということは，時空の広がった領域にわたる場の量の変化や伝播が本質的である物理学にとって，ガウスの定理が非常に重要な役割を果たすことを示唆している．実際電磁気学における荷電流の保存則のような局所的なベクトル流の保存則，$A^\mu{}_{;\mu} = 0$ が存在する場合はその直接的な例である．いま時空領域 V として図 4.5 のように空間的超曲面 Σ_1, Σ_2 と時間的超曲面 Σ_t で囲まれた空間的に十分広い領域を考え，A^μ が時空上の空間的無

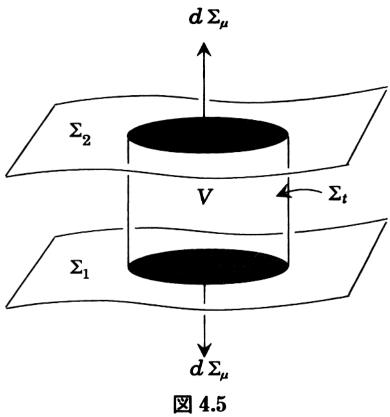


図 4.5

限遠で十分に速くゼロとなり，Σ_t 上での値が無視できる状況を考える．このときガウスの定理により

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_V A^\mu{}_{;\mu} dV = \int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_t} A^\mu d\Sigma_\mu \\
&= \int_{\Sigma_1} A^\mu d\Sigma_\mu + \int_{\Sigma_2} A^\mu d\Sigma_\mu + \int_{\Sigma_t} A^\mu d\Sigma_\mu \\
&= \int_{\Sigma_1} A^\mu d\Sigma_\mu + \int_{\Sigma_2} A^\mu d\Sigma_\mu \,,
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで Σ_1, Σ_2 に垂直な未来を向いた時間的単位ベクトルを n_μ とすると，Σ_1 に垂直な外向きの単位ベクトルが過去を向いていることを考慮して

$$
\int_{\Sigma_2} (-A^\mu n_\mu) d\Sigma - \int_{\Sigma_1} (-A^\mu n_\mu) d\Sigma = 0,
$$

を得る．これと Σ_1, Σ_2 の選び方が任意であったことから，任意の十分に広がった空間的超曲面 Σ 上での積分，

$$
Q\,[\Sigma] := \int_\Sigma (-A^\mu n_\mu) d\Sigma \,, \qquad (4.72)
$$

が Σ の選び方によらず常に一定であることがわかる．特に Σ 上で x^0 =一定となるように時間座標を選べば，前節の (4.55) 式より

$$
Q\left[\Sigma(x^0)\right] = \int_{x^0=\text{const.}} A^0 \sqrt{-g}\, d^3x \,; \quad d^3x = dx^1 dx^2 dx^3, \qquad (4.73)
$$

を得る．このようにガウスの定理は局所的なベクトル流保存則を大局的な保存量に結び付けるうえで中心的な役割をする．

4.4 時空の対称性

一般の時空にはもちろん対称性はないが，曲がった時空における相対論特有の様々な現象を解析する際に，理想化された状況として時空に適当な対称性を仮定することが現象の本質を理解するうえでの大きな手助けになることが多い．そこで，時空に対称性があると，それが計量にどのように反映されるかを考察しよう．

時空の計量がある対称性をもつとは，時空の線素がその対称性に対応する方向への運動に対して不変に保たれることである．そこでいま，4.1 節 (d) 項で考えた 1 パラメーター曲線 $x^\mu_{P(t)} = f^\mu(t)$ に沿っての運動を考えると，線素がこの曲線上で一定であるから $ds^2_P = ds^2_{P(t)}$，すなわち

$$ds^2_{P(t)} = g_{\mu\nu}(x_{P(t)})dx^\mu_{P(t)}dx^\nu_{P(t)} = g_{\mu\nu}(x_P)dx^\mu_P dx^\nu_P, \tag{4.74}$$

が成り立つ．よって特に無限小の運動 $t = \epsilon$ に対してもこれが成り立つから計量のリー微分はゼロである：

$$\mathcal{L}_\xi\, g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0; \quad \xi^\mu = \frac{df^\mu}{dt}\,. \tag{4.75}$$

これが時空に対称性があると成り立つ式である．この式をキリング方程式 (Killing equation)，ベクトル ξ^μ をキリングベクトル (Killing vector) という．

このように時空に対称性があるとそれに対応するキリングベクトルが必ず存在する．逆に与えられた計量に対してキリング方程式が解をもてば，その解に対応した対称性が存在する．特に適当な座標系 $\{x^\mu\}$ に対して計量テンソルの成分 $g_{\mu\nu}(x)$ をそのうちの一つの座標，例えば x^3-座標に依存しないように取れれば計量は x^3-軸方向の運動に対して不変であり，その対称性を表すキリングベクトル ξ^μ の成分は定数倍の自由度を除いて

$$\xi^\mu = (0, 0, 0, 1),$$

で与えられる．これはベクトルを微分と見る定義（2.2 節参照）に従えば，

$$\xi^\mu \overrightarrow{e}_\mu = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^3}\,,$$

となることからもわかるであろう．また，一般の n 次元空間（時空）において独立なキリングベクトルの数は，最大 $n(n+1)/2$ 個しかないことが知られている．独立なキリングベクトルがこの許される最大個数あるとき，その空間（時空）を最大対称空間 (maximally symmetric space) という．

以下で対称性のある空間の最も簡単な例として 2 次元の単位球面を考える．その線素は

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{4.76}$$

で与えられる．よく知られているように，この単位球面には 3 次元回転の対称性 $SO(3)$ があり，その独立な生成子の数は三つである．よってこれは 2 次元の最大対称空間である．この対称性に対するキリングベクトルを求めてみよう．

キリング方程式を計量 (4.76) に対して具体的に書き下すと，

$$\begin{aligned}(\theta,\theta)\text{–成分：}\quad & \xi^{\theta}{}_{,\theta}=0,\\ (\varphi,\varphi)\text{–成分：}\quad & \sin\theta\cos\theta\xi^{\theta}+\sin^2\theta\xi^{\varphi}{}_{,\varphi}=0,\\ (\theta,\varphi)\text{–成分：}\quad & \xi^{\theta}{}_{,\varphi}+\sin^2\theta\xi^{\varphi}{}_{,\theta}=0,\end{aligned}\tag{4.77}$$

を得る．まずすぐに求まる解は

$$\xi^A_{(3)}=(\xi^{\theta},\xi^{\varphi})=(0,1),\tag{4.78}$$

である．これは (4.76) 式で与えた計量が φ によらないことからも自明なように，$\theta=0$ $(=\pi)$ 軸まわりの回転の生成子に対応したキリングベクトルである．

残りの二つの $SO(3)$ の生成子に対応したキリングベクトルを求めるために，まず (4.77) 式の第 1 式より ξ^{θ} が θ に依存しないから $\xi^{\theta}=f(\varphi)$ とおく．次に第 2 式を $\xi^{\varphi}{}_{,\varphi}$ に関して解き直した式，$\xi^{\varphi}{}_{,\varphi}=-\cot\theta f(\varphi)$ を第 3 式を φ で微分した式に代入すると，

$$f''(\varphi)+f(\varphi)=0,$$

を得る．よって $\xi^{\theta}=\cos\varphi$, または $\sin\varphi$ である．これを再び第 2 式に代入して ξ^{φ} について解くと結局，

$$\begin{aligned}\xi^A_{(1)}&=(\cos\varphi,-\cot\theta\sin\varphi),\\ \xi^A_{(2)}&=(\sin\varphi,\ \cot\theta\cos\varphi),\end{aligned}\tag{4.79}$$

を得る．

これら三つのベクトル $\xi^A_{(i)}$ $(i=1,2,3)$ が $SO(3)$ の三つの生成子に対応していることは次のようにしてわかる．いま一般に，任意の二つのベクトル U^{μ}, V^{μ} に対して

$$[U,V]^{\mu}:=U^{\mu}{}_{;\nu}V^{\nu}-V^{\mu}{}_{;\nu}U^{\nu}=U^{\mu}{}_{,\nu}V^{\nu}-V^{\mu}{}_{,\nu}U^{\nu},\tag{4.80}$$

によって別のベクトル $[U,V]^\mu$ への写像を定義する．これを $\xi^A_{(i)}$ に適用すると

$$\left[\xi_{(i)},\xi_{(j)}\right]^A = \epsilon^{ijk}\xi^A_{(k)}\,, \tag{4.81}$$

が成り立っていることがわかる．ここで ϵ^{ijk} は $\epsilon^{123}=1$ と規格化された添字 i, j, k に対する完全反対称記号である[1]．(4.81) 式は $SO(3)$ の生成子が満たす代数にほかならない．

最後にキリングベクトルの重要な応用例の一つを取り上げる．いま時空上に 2 階の対称テンソル $T^{\mu\nu}$ が存在し，その発散がゼロであるとする：

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0, \qquad T^{\mu\nu}=T^{(\mu\nu)}\,.$$

例えばアインシュタインテンソル $G^{\mu\nu}$ はそのよい例である．このとき時空にキリングベクトル ξ^μ が存在するとキリング方程式 (4.75) を使ってベクトル $V^\nu=\xi_\mu T^{\mu\nu}$ が保存流になることがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned} V^\nu{}_{;\nu} &= \left(\xi_\mu T^{\mu\nu}\right)_{;\nu} = \xi_{\mu;\nu}T^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left(\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}\right)T^{\mu\nu}=0, \end{aligned} \tag{4.82}$$

が成り立つ．これに前節のガウスの定理を適用すると (4.73) 式に対応した大局的な保存量が得られる．特にアインシュタインテンソルはどのような時空でもその発散がゼロであるから，空間的無限遠で十分に速く $G^{\mu\nu}\to 0$ となる時空では，キリングベクトルが存在するとそれに対応した大局的な幾何学的保存量が常に存在することになる．

問　題

4.1　(4.9) 式を示せ．

4.2　(4.81) 式を確かめよ．

---

[1] ここの ϵ^{ijk} は 4.2 節で導入した ϵ^{ijk} とその成分はまったく同じであるが，添字 i, j, k の意味が空間座標とは無関係である点で概念的には異なる．完全反対称「テンソル」ではなく完全反対称「記号」と呼ぶゆえんである．

4.3　キリングベクトル ξ^μ が $\xi_{\mu;\nu;\alpha} = R^\beta{}_{\alpha\mu\nu}\xi_\beta$ を満たすことを示せ．また，この式とキリング方程式から n 次元空間の独立なキリングベクトルの数が最大 $n(n+1)/2$ 個であることを示せ．

4.4　計量の形が (3.27) 式で与えられるとき，$\Box\phi$ を具体的に計算せよ．またこのとき 2 階の対称テンソル $T^{\mu\nu}$ に対して $T_0{}^\nu{}_{;\nu}$ が

$$T_0{}^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T_0{}^\nu\right),$$

と全微分形に書けることを確かめよ．

5　相対論的重力場の方程式

ニュートン重力では重力場を作る源は物質の質量であった．ところで特殊相対論によると質量とエネルギーは等価であり，エネルギーは 4 元運動量の時間成分である．よって相対論的重力理論では重力場，すなわち時空の曲率が物質のエネルギー運動量によって作られることが予測される．この章では，いままでに準備した曲がった時空を記述する数学的手法を使って，まず物質のエネルギー運動量テンソルについて，その形や保存則について議論する．その後アインシュタイン方程式を導出し，最後にそれを与える作用汎関数について考察する．

5.1　エネルギー運動量テンソル

時空上に単位ベクトル n^μ に垂直な無限小の 3 次元超曲面 $d\Sigma$ を考え，その近傍にテトラッド基底 $e^\mu_{(\alpha)}$ を張る．無限小超曲面 $d\Sigma$ を通して運ばれる物質の 4 元運動量の $e^\mu_{(\alpha)}$ 方向の成分を $dq^{(\alpha)}$ とおくと $dq^{(\alpha)}$ は $d\Sigma$ に比例するはずである．よって

$$dq^{(\alpha)} = \frac{1}{c} T^{(\alpha)(\beta)} e^\mu_{(\beta)} d\Sigma_\mu; \quad d\Sigma_\mu = \pm n_\mu d\Sigma,\ n_\mu n^\mu = \pm 1, \tag{5.1}$$

と書ける．ここで現れる係数 $T^{(\alpha)(\beta)}$ は定義から (質量) × (速度)^2 ÷ (長さ)^3 の次元をもち，$e^\mu_{(\beta)}$ に垂直な面を通る 4 元運動量流束の (α)-成分を表す．特に $u^\mu = e^\mu_{(0)} c$ を 4 元速度にもつ観測者を考えると，$T^{(\alpha)(\beta)}$ のそれぞれの具体的意味は

$$T^{(0)(0)}:\ (4\,元運動量)^0 \times (4\,元流束)^0 = エネルギー密度,$$

$$T^{(0)(i)}:\ (4\,元運動量)^0 \times (4\,元流束)^i = エネルギー流束/c,$$

$$T^{(i)(0)}:\ (4\,元運動量)^i \times (4\,元流束)^0 = 運動量密度 \times c,$$

$$T^{(i)(j)}:\ (4\text{ 元運動量})^i \times (4\text{ 元流束})^j = \text{運動量流束},$$

である．

$T^{(\alpha)(\beta)}$ を通常の座標基底に戻せば

$$T^{\mu\nu} = e^{\mu}_{(\alpha)} e^{\nu}_{(\beta)} T^{(\alpha)(\beta)}, \tag{5.2}$$

である．$T^{\mu\nu}$ を成分とするテンソルをエネルギー運動量テンソルという．$T^{\mu\nu}$ を使うと (5.1) 式は

$$c\,dq^{(\alpha)} = e^{(\alpha)}_{\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu}\,, \tag{5.3}$$

と書ける．$T^{\mu\nu}$ は添字 μ, ν に関して対称である．これを一般の物質に対して示すには，後の 5.4 節で与えるように作用原理からエネルギー運動量テンソルを定義してやらなければならないので，ここでは具体例を示すに留める．

一つの例は電磁場のエネルギー運動量テンソルである．まずミンコフスキー時空で考えよう．特殊相対論で知られているように電磁場のベクトルポテンシャルを A_μ とすると, 電磁場の強さはテンソル,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\,, \tag{5.4}$$

が表す．ここで電場は $E_i = F_{0i}$，磁場は $B^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}$ である．これを使うと電磁場のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma}\right),$$

で与えられる．これは添字 μ, ν に対して対称である．またこれはミンコフスキー時空での表式であるが，曲がった時空においても局所ローレンツ座標を取ればこれと同じ表式が成り立つ．さらに $F_{\mu\nu}$ の表式 (5.4) は定義から接続 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ によらない．よって一般座標に移るには単に $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ と計量を一般化すればよい．すなわち,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}F_{\alpha\rho}F_{\beta\sigma}\right), \tag{5.5}$$

である．

もう一つの例は質量 m の同種粒子からなる気体の場合である．再び観測者の 4 元速度を $u^\mu = e^{\mu}_{(0)}c$ とし，この観測者から見た気体のエネルギー運動量

テンソルのテトラッド成分を考える．各々の粒子の運動量のテトラッド成分は $(q^{(0)})^2 = m^2c^2 + q_{(i)}q^{(i)}$ を満たす．このとき観測者の静止系での流体の運動量分布関数を $f(q^{(i)})$ とすると，$T^{(\alpha)(\beta)}$ の定義式 (5.1) と $q^{(\beta)}/m$ が各々の粒子の 4 元速度であることから，この気体のエネルギー運動量テンソルのテトラッド成分は

$$T^{(\alpha)(\beta)} = \int q^{(\alpha)} \frac{q^{(\beta)}}{m} f(q^{(i)}) d^3q\,; \quad d^3q = dq^{(1)}dq^{(2)}dq^{(3)}, \tag{5.6}$$

で与えられる．これより確かに $T^{(\alpha)(\beta)}$ は対称である．よって $T^{\mu\nu}$ は対称テンソルである．

特にこの気体が曲率が無視できるほど十分に小さな時空領域で局所的に熱平衡にあるとしよう．このような気体を完全流体 (perfect fluid) という．このとき u^μ として流体の静止系の 4 元速度を取れば分布関数 $f(q^{(i)})$ は $q^{(i)}$ の絶対値 $q := \sqrt{q^{(i)}q_{(i)}}$ にしかよらない．したがって

$$T^{(0)(0)} = \rho c^2, \qquad T^{(0)(i)} = 0, \qquad T^{(i)(j)} = \delta^{ij}p,$$

を得る．ここで ρ は熱平衡状態における気体の質量密度 (= エネルギー密度$/c^2$)，p はそのときの圧力である．これを (5.2) 式を使って一般座標に戻すと

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}u^\mu u^\nu\right), \tag{5.7}$$

となる．これが完全流体のエネルギー運動量テンソルである．また ρ と p が必ずしも熱平衡状態の質量密度と圧力という物理的意味をもっていなくとも，$T^{\mu\nu}$ が (5.7) 式と同じ形を取る場合を完全流体型のエネルギー運動量テンソルという．

5.2　エネルギー運動量保存則

さて $T^{\mu\nu}$ が満たす最も重要な法則，エネルギー運動量保存則を示そう．いま時空上の点 P を中心とする十分小さな領域を考え，3.2 節でやったように P を原点とする局所ローレンツ座標 $\{x^\mu\}$ を張る．このとき明らかにテトラッドを

$$e^{(\alpha)}_\mu(x) = e^{(\alpha)}_\mu(0) + O(x^2)\,; \quad e^{(\alpha)}_\mu(0) = \delta^\alpha_\mu, \tag{5.8}$$

と選ぶことができる．よって特に

$$e^{(\alpha)}_{\mu;\nu}(x) = e^{(\alpha)}_{\mu,\nu}(x) = O(x), \tag{5.9}$$

である．

このテトラッドに対して (5.3) 式で与えられる 4 元運動量 $dq^{(\alpha)}$ を点 P を含む微小な 4 次元体積 $\Delta V = \epsilon^4$ の境界超曲面 $\partial\Delta V$ 上で積分すると

$$\begin{aligned} c\int_{\partial\Delta V} dq^{(\alpha)} &= \int_{\partial\Delta V} e^{(\alpha)}_{\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu \\ &= \int_{\Delta V} \left(e^{(\alpha)}_{\mu;\nu} T^{\mu\nu} + e^{(\alpha)}_{\mu} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \right) dV\,, \end{aligned} \tag{5.10}$$

を得る．ところで時空の各点でエネルギー運動量の湧き出しがないとすると，(5.8) 式より $\Delta V = \epsilon^4$ が十分小さい極限で左辺は

$$c\int_{\partial\Delta V} dq^{(\alpha)} = O(\epsilon^5),$$

のように振る舞う．一方最後の右辺第 1 項も (5.9) 式より

$$\int_{\Delta V} e^{(\alpha)}_{\mu;\nu} T^{\mu\nu} dV = O(\epsilon^5),$$

となる．したがって

$$\int_{\Delta V} e^{(\alpha)}_{\mu} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} dV = O(\epsilon^5), \tag{5.11}$$

が成り立つ．この式は局所ローレンツ座標を用いて導いたが，積分の定義からその結果は任意の座標系で成り立つ．(5.11) 式の両辺を ΔV で割って $\epsilon \to 0$ の極限を取ると最終的にエネルギー運動量保存則の共変形，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{5.12}$$

を得る．点 P が任意であったことからこの式はもちろん時空上のすべての点で成り立つ．

エネルギー運動量保存則の例としてそれを電磁場の場合に適用してみよう．(5.5) 式の発散を取ると

$$4\pi T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(F^{\mu\sigma;\rho} - \frac{1}{2} F^{\rho\sigma;\mu} \right) F_{\rho\sigma} + F^{\mu}{}_{\sigma} F^{\nu\sigma}{}_{;\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(F^{\mu\sigma;\rho} - F^{\mu\rho;\sigma} - F^{\rho\sigma;\mu}\right) F_{\rho\sigma} + F^{\mu}{}_{\sigma}F^{\nu\sigma}{}_{;\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left(F^{\mu\sigma;\rho} + F^{\rho\mu;\sigma} + F^{\sigma\rho;\mu}\right) F_{\rho\sigma} + F^{\mu}{}_{\sigma}F^{\nu\sigma}{}_{;\nu} \\
&= F^{\mu}{}_{\sigma}F^{\nu\sigma}{}_{;\nu} = 0,
\end{aligned}
$$

となる．ここで $F_{[\mu\nu;\alpha]} \equiv 0$ が成り立つことを使った．これは $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$，すなわち（源なしの）マックスウェル方程式が成立すれば $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ が自動的に成立することを意味している．

また完全流体に対するエネルギー運動量保存則も調べてみよう．(5.7) 式より

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= (\rho u^{\nu})_{;\nu}u^{\mu} + \frac{1}{c^2}pu^{\nu}{}_{;\nu}u^{\mu} + \rho u^{\mu}{}_{;\nu}u^{\nu} + \frac{1}{c^2}pu^{\mu}{}_{;\nu}u^{\nu} + p_{;\nu}h^{\mu\nu} \\
&= 0\,; \\
h^{\mu\nu} &:= \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}u^{\mu}u^{\nu}\right),
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

である．ここで $u_{\mu}u^{\mu} = -c^2$ より $h^{\mu\nu}$ は

$$
h^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu} = 0, \qquad h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\alpha}{}_{\nu} = h^{\mu}{}_{\nu}\,, \qquad h^{\mu}{}_{\mu} = 3,
$$

を満たす．よって $h^{\mu\nu}$ は u^{μ} に垂直な空間的 3 次元方向への射影テンソルである．そこで (5.13) 式を $h^{\mu\nu}$ を使って u^{μ} に平行な成分と垂直な成分に分けると，$u_{\nu}u^{\nu}{}_{;\mu} = 0$ に注意して

$$
-u_{\mu}T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho c^2 u^{\nu})_{;\nu} + pu^{\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{5.14}
$$

$$
h^{\mu}{}_{\alpha}T^{\alpha\nu}{}_{\nu} = \left(\rho + \frac{1}{c^2}p\right)u^{\mu}{}_{;\nu}u^{\nu} + h^{\mu\nu}p_{;\nu} = 0, \tag{5.15}
$$

を得る．(5.14) 式は流体のエネルギー保存則，(5.15) 式は速度場に対するオイラー方程式の共変形である．すなわちエネルギー運動量保存則は流体の運動方程式が満たされると自動的に満たされる．このようにエネルギー運動量保存則は任意の物質（場）に対して，それらが運動方程式を満たすと自動的に成り立つ．この事実は 5.4 節で作用原理に基づいて一般的に示す．

(5.14), (5.15) 式と非相対論的流体の方程式との違いは，エネルギー密度に流体粒子の静止質量の寄与が含まれていることと，運動方程式の速度場に対する慣性質量項に全エネルギー密度に等価な質量密度とともに圧力も寄与している点

である．また (5.14) 式は断熱過程の熱力学第一法則に完全に対応している．これを確かめるためにいま質量 m の粒子から成る流体を考え，それぞれの粒子は生成も消滅もしない場合を考えよう．このとき，流体の静止系における粒子の個数密度を n とすると，粒子数保存の式は

$$(nu^\mu)_{;\mu} = n_{,\mu}u^\mu + nu^\mu{}_{;\mu} = 0, \tag{5.16}$$

で与えられる．ここで流体の静止系で測った固有時間を τ とすると，$u^\mu(\partial/\partial x^\mu) = d/d\tau$ より上式は $dn/d\tau + nu^\mu{}_{;\mu} = 0$ と書ける．したがって

$$u^\mu{}_{;\mu} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{d\tau} = \frac{1}{v}\frac{dv}{d\tau}; \quad v = \frac{1}{n},$$

である．ここで v は 1 粒子が占める固有体積 (specific volume) である．一方，流体の 1 粒子当たりの内部エネルギー (specific energy) は $\epsilon = (\rho/n - m)c^2$ であるから，エネルギー保存則 (5.14) から粒子数保存則 (5.16) を使って静止質量の部分を取り除くと

$$v\left((\epsilon nu^\nu)_{;\nu} + pu^\nu{}_{;\nu}\right) = \frac{d\epsilon}{d\tau} + p\frac{dv}{d\tau} = 0, \tag{5.17}$$

を得る．これは断熱過程の熱力学第一法則にほかならない．

5.3　アインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式は，相対論的重力場の方程式として最も簡単かつ自然な形をしている．それを見るためにまず初めに時空の幾何学としての重力理論がもつべき条件を考察する．次にそれに基づいて構成した方程式がニュートンの重力理論の自然な拡張になっていることを示そう．

ニュートン重力理論の特徴は

(i) 万有引力：すべての物質（質量）は重力場を作り，またすべての物質に重力が働く．

(ii) 遠隔作用[1]：物質のない空間にも重力は及ぶ．

---

[1]「遠隔作用」という用語が人によって異なる意味で使われているようであるが，ここでは「物体同士が直接接していなくても力を及ぼし合う」という広い意味で使う．

の2点である．これらの性質を保ちながら時空の幾何学としての重力理論を考えると，それが満たすべき自然な条件として以下のものが考えられる：

(1) 共変性：方程式は一般座標変換に対して共変的なテンソル型であり，重力は時空の曲率によって表される場である．

(2) 重力源：重力場は物質のもつエネルギー運動量によって生じる．

(3) 遠隔作用[2]：物質によって生じた重力場（時空の曲率）は真空中でも消えずに伝播する．

(4) 非相対論的極限：弱い重力，非相対論的極限 ($c \to \infty$) でニュートン重力を再現する．

一方，重力理論を構成する道具として我々に与えられている時空上の基本的テンソルは，計量テンソル，曲率テンソルと物質のエネルギー運動量テンソルである．これらには一般的に以下の性質がある．

(a) 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は共変的に定数である：

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0.$$

(b) 4次元時空上の曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ の代数的独立成分は20個，リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は10個である．

(c) リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は縮約されたビアンキ恒等式 (2.48) を満たす：

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} \equiv 0.$$

(d) 物質のエネルギー運度量テンソル $T^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量保存則を満たす：

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

---

[2] 前ページ脚注参照．

これらの性質に基づいて上の (1) から (4) までの条件を考えると，重力場の方程式の候補として最も簡単な形は

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{5.18}$$

である．ここで κ, Λ はある物理定数である．これがアインシュタイン方程式である．以下で見るように κ は重力定数に対応している．また Λ は宇宙定数 (cosmological constant) と呼ばれ，宇宙全体の進化を考えるときには重要になりうるが通常の天体のスケールでは無視できる，たとえ存在するとしても非常に小さな定数である．これはアインシュタインが最初に重力場の方程式を導出したときにはなかった項であり，後に宇宙論的考察からいったん付加し，その後その考察の間違いに気がついて再び取り除いたいわく付きの定数である．ところが最近の宇宙論では宇宙定数が復活してきている（第 9 章参照）．いずれにせよ宇宙定数は宇宙論にしか効かない項であり，当面の考察では無視する．

さて (5.18) 式が条件 (1), (2) を満たすことは自明であろう．条件 (3) に関しては $T^{\mu\nu} = 0$（真空）のとき $\Lambda = 0$ ならば $G^{\mu\nu} = 0$ ($\Longleftrightarrow$ $R^{\mu\nu} = 0$) であるが，曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ にはまだワイルテンソル $C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ で表される 10 個の自由度が残っており，一般に $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \neq 0$ であるからこの条件は満たされると期待される．そこで残るは条件 (4) である．以下でこれが確かに満たされることを示し，定数 κ を決定しよう．

いま時間的に，光速に比べてゆっくりとしか変化せず十分に弱い重力場を考える．すなわち時空はほとんどミンコフスキー的であるとする．このとき計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \qquad h_{\mu\nu,0} = \frac{1}{c}\partial_t h_{\mu\nu} \approx 0, \tag{5.19}$$

と近似できる[3]．この時空上を自由落下運動する粒子を考えるとその軌道は測地線である．粒子の固有時を τ とすると測地線方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

[3] ここでの $h_{\mu\nu}$ は前節で定義した 3 次元空間への射影テンソルとは全く無関係である．異なるものに同じ記号を使うのは望ましいことではないが，一般的慣習としてそのどちらにもよく使われる記号であり，混乱する要素もほとんどないのであえて両方とも $h_{\mu\nu}$ を使う．

である．ここで運動が非相対論的であるとすると

$$\frac{dx^0}{d\tau} \approx c, \qquad \frac{dx^i}{d\tau} \approx v^i, \qquad v^2 = \delta_{ij} v^i v^j \ll c^2,$$

が成り立つ．ここで $v^i = dx^i/dt$ である．よって測地線方程式の空間成分は $v^2/c^2 \to 0$ の極限で

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + c^2 \Gamma^i{}_{00} = 0, \tag{5.20}$$

となる．ところで $\Gamma^i{}_{00}$ を (5.19) 式の近似の下で計算すると

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2} g^{i\mu} \left(2g_{\mu 0,0} - g_{00,i} \right) \approx -\frac{1}{2} \delta^{ij} h_{00,j}\,,$$

である．これを (5.20) 式に代入すると

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \partial_i h_{00}\,, \tag{5.21}$$

を得る．一方ニュートン理論では，重力場中を運動する粒子の運動方程式は ϕ_N をニュートンの重力ポテンシャルとすると

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \phi_N\,, \tag{5.22}$$

である．(5.21) 式と (5.22) 式を比較するとニュートン重力を表す計量は

$$h_{00} = -\frac{2\phi_N}{c^2}\,, \tag{5.23}$$

で与えられることがわかる．ここで h_{00} 以外の $h_{\mu\nu}$ は運動方程式に現れないからニュートン重力の極限ではゼロと考えてよい．

(5.23) 式は，物質の作る重力が十分に弱い極限での重力場の方程式の解となっていなければならない．そこで場の方程式 (5.18) を弱い静的な重力場の近似の下で解いてみよう．まず (5.18) 式をその対角成分の和を取った式,

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = -R = \kappa T^\mu{}_\mu\,,$$

を使ってそれと同等な方程式,

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha \right), \tag{5.24}$$

に書き換えておく．

さて (5.24) 式の $(0,0)$-成分を考えよう．左辺を計算すると $h_{\mu\nu}$ の 1 次で

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^{\mu}{}_{0\mu 0} \\ &= \Gamma^{\mu}{}_{00,\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{0\mu,0} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}{}_{00} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu 0}\Gamma^{\nu}{}_{0\mu} \\ &\approx \Gamma^{i}{}_{00,i} = -\frac{1}{2} \overset{(3)}{\Delta} h_{00} \\ &= \frac{1}{c^2} \overset{(3)}{\Delta} \phi_N ; \quad \overset{(3)}{\Delta} = \delta^{ij}\partial_i\partial_j , \end{aligned} \tag{5.25}$$

を得る．

一方右辺は (5.7) 式より

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho(u_0)^2 + p\left(g_{00} + \frac{1}{c^2}(u_0)^2\right), \\ T^{\alpha}{}_{\alpha} &= -\rho c^2 + 3p , \end{aligned} \tag{5.26}$$

であるが，

$$(u_0)^2 \approx (g_{00}u^0)^2 \approx c^2, \qquad g_{00} + \frac{1}{c^2}(u_0)^2 \approx -1 + 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right) = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

を使うと $v^2/c^2 \to 0$ の極限で

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{1}{2}\rho c^2, \tag{5.27}$$

を得る．

したがって (5.25) 式と (5.27) 式より

$$\overset{(3)}{\Delta} \phi_N = \frac{\kappa c^4}{2}\rho , \tag{5.28}$$

を得る．これは確かにニュートン重力のポアソン方程式，

$$\overset{(3)}{\Delta} \phi_N = 4\pi G\rho , \tag{5.29}$$

と同一形である．ここで G はニュートンの重力定数である．(5.28) 式と (5.29) 式との比較から係数 κ は

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} , \tag{5.30}$$

と決まる．よってアインシュタイン方程式は（宇宙定数を復活させて）最終的に

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \tag{5.31}$$

で与えられる．

ここでアインシュタイン方程式の簡単な次元解析を行っておこう．再び宇宙定数 Λ が無視できると仮定する．物質の質量密度 ρ が与えられたとき，それが作る時空の曲率の大きさは係数 κc^2 で決まる．この具体的数値を求めると

$$\kappa c^2 = \frac{8\pi G}{c^2} = 2 \times 10^{-7}\ \mathrm{cm\,g^{-1}},$$

である．よって物質が作る曲率の大きさはその特徴的曲率半径を L とすると

$$\frac{1}{L^2} \sim R_{00} \sim 10^{-27} \left(\frac{\rho}{1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}} \right) \mathrm{cm}^{-2}, \tag{5.32}$$

で与えられる．これより，例えば太陽を考えると平均密度は $\rho_\odot \sim 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 程度であるから，太陽内部での時空の曲率半径 $L_\odot$ はほぼ

$$L_\odot \sim 3 \times 10^{13}\ \mathrm{cm}$$

である．一方太陽の半径は $R_\odot \sim 7 \times 10^{10}$ cm であるから $L_\odot \gg R_\odot$ である．このように普通の星が作る時空の曲率は非常に小さいためニュートン理論がよい近似で成り立つのである．

逆に密度が $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 程度であっても，星の半径が 10^{13} cm を越えるほど大きくなるとその内部での重力場は非常に強くなる．このように「強い重力」=「超高密度」という，通常我々が抱きやすい重力に対するイメージは実は間違っている．アインシュタイン方程式の両辺に物質分布の広がりのサイズ R の 2 乗を掛け，物体の全質量が $M \sim \rho R^3$ であることを使うと

$$\frac{R^2}{L^2} \sim \frac{GM}{Rc^2},$$

なる評価を得る．左辺は時空の相対的な曲がり具合を表しており，右辺はそれが質量とサイズの比で与えられることを意味している．一方 $\rho \sim M/R^3$ であるから，GM/Rc^2 が 1 のオーダーであれば M（あるいは R）を大きく取れば取るほど，どれほど低密度でも非常に強い重力場が出現するのである．これは

重力が電磁力のように正負がなく決して遮蔽されず，物体の質量に比例して累積的に強くなる結果である．

上ではアインシュタイン方程式の (0,0)-成分のみを使った議論で h_{00} が決まり，非相対論的極限でニュートン理論が再現されることを示した．このとき残りのアインシュタイン方程式の成分は他の $h_{\mu\nu}$ を決定する方程式となるが，(5.23) 式のところで指摘したように，それらはニュートンの重力理論では現れないので解く必要がない．それらが問題となるのは，ニュートン理論に相対論的効果の補正を入れて考える必要が出てくる場合である．こうした相対論的補正項をポストニュートン項 (post-Newtonian terms) と呼び，アインシュタインの重力理論を実験的に検証する際に重要な役割を果たす．

5.4　重力場の作用汎関数

前節ではニュートン理論の運動方程式やポアソン方程式から，その拡張としてアインシュタインの相対論的重力場の方程式を導いた．しかし方程式の具体形がわかっているだけではその系に付随した対称性や保存則，一般解の特徴等がなかなか見えてこない．これら系がもつ一般的性質を統一的に扱うためには，解析力学でやるように作用原理に基づく定式化が必要である．それだけでなく，系を量子化する場合には作用原理が本質的役割を果たす．そこでこの節では作用原理に基づいてアインシュタイン方程式を与える作用汎関数を求める．

アインシュタイン方程式は共変的なテンソル方程式であるから，その作用積分はあるスカラー関数の時空上での積分になっていなければならない．そのスカラー関数，すなわちラグランジュ関数は，アインシュタイン方程式の左辺と右辺に対応して重力を担う部分 L_g と物質を担う部分 L_m との和 $L = L_g + L_m$ になるであろう．また重力場（時空の曲率）は計量テンソルの関数であるから，重力の作用積分 $I_g = \int L_g dV/c$ は $g_{\mu\nu}$ の汎関数である．一方物質の作用積分 $I_m = \int L_m dV/c$ は $g_{\mu\nu}$ の汎関数であるとともに物質の自由度の汎関数でもある．そこで物質の自由度を一般に ϕ_A $(A = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと，全作用汎関数 I は

$$I[g_{\mu\nu}, \phi_A] = I_g[g_{\mu\nu}] + I_m[g_{\mu\nu}, \phi_A], \tag{5.33}$$

と表される．そしてこの作用汎関数の $g_{\mu\nu}$ での変分がアインシュタイン方程式を与え，ϕ_A での変分が物質（場）の運動方程式を与えなければならない．すなわち

$$\delta_g I = \delta_g I_g + \delta_g I_m \propto \int \left(-G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu}\right) \delta g_{\mu\nu} dV, \quad (5.34)$$

$$\delta_\phi I = \delta_\phi I_m = \int \frac{\delta I_m}{\delta \phi_A} \delta\phi_A dV, \quad (5.35)$$

となるべきである．ここで δ_g は計量 $g_{\mu\nu}$ についての変分，δ_ϕ は物質（場）ϕ_A についての変分を表し，$\delta I_m/\delta\phi_A = 0$ は物質のオイラー・ラグランジュ方程式を表す．

これからすぐにわかることは，物質のエネルギー運動量テンソルがその作用汎関数 I_m の計量に対する変分で与えられるという事実である：

$$\delta_g I_m \propto \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} dV.$$

実はこれによってエネルギー運動量テンソルが定義されるというのが正しい．したがって $T^{\mu\nu}$ の対称性は定義により自明となる．もっともこのままでは $T^{\mu\nu}$ に定数倍の不確定さが残っている．この不確定さは I_m 自身が古典論の範囲では定数倍を除いてしか決まらないことに由来する．しかし，物質（場）を量子化すると I_m がその定数係数まで含めて唯一に決定される．こうして決めた I_m に対して $T^{\mu\nu}$ は

$$\delta_g I_m = \frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} dV, \quad (5.36)$$

で定義される．

この $T^{\mu\nu}$ の定義を使うと，5.3 節で触れた物質の運動方程式とエネルギー運動量保存則との関係を一般的に示すことができる．作用汎関数 $I_m[g_{\mu\nu}, \phi_A] = \int L_m dV$ はそれが時空上の積分であることから定義により座標の取り方によらない．したがって特に無限小の座標変換，

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu(x) = x^\mu - \epsilon\xi^\mu, \quad (5.37)$$

によっても不変である．この変換によって誘起される $g_{\mu\nu}$ や ϕ_A の変分は 4.2 節 (d) 項で議論したようにそれらのリー微分に等しい：

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2\xi_{(\mu;\nu)}, \qquad \delta_\xi \phi_A = \mathcal{L}_\xi \phi_A. \quad (5.38)$$

よって

$$0 \equiv \delta_\xi I_m = \frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\,\delta_\xi g_{\mu\nu}\,dV + \int \frac{\delta I_m}{\delta\phi_A}\,\delta_\xi\phi_A\,dV, \tag{5.39}$$

である．右辺第１項を変形すると

$$\frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\delta_\xi g_{\mu\nu}dV = \frac{1}{c}\int T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}dV = \frac{1}{c}\int \left((T^{\mu\nu}\xi_\mu)_{;\nu} - T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu\right)dV$$

となり最後の右辺第１項は表面積分となって落ちる．また (5.39) 式の右辺第２項は物質のオイラー・ラグランジュ方程式そのものであり，ϕ_A が運動方程式を満たせば $\delta_\xi\phi_A$ によらずにゼロとなる．したがって $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ である．このようにエネルギー運動量保存則は，物質（場）が運動方程式に従う限り作用積分の座標不変性の帰結として自動的に満たされるのである．

ここで，(5.36) 式で定義された $T^{\mu\nu}$ が通常のエネルギー運動量テンソルと一致していることを電磁場の場合を例にとって示しておこう．その作用汎関数 I_{em} は

$$I_{em} = \frac{1}{c}\int L_{em}\,dV\,; \quad L_{em} = -\frac{1}{16\pi}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\,, \tag{5.40}$$

で与えられる．これを $g_{\mu\nu}$ で変分するためにその計量依存性を調べてみると I_{em} は $g^{\mu\nu}$ と $dV=\sqrt{-g}d^4x$ のみによっていることがわかる．そこでこれらの変分を考えると $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}=\delta^\mu_\nu$ より

$$\begin{aligned} \delta g^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}\,, \\ \delta dV &= \delta\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,dV\,, \end{aligned} \tag{5.41}$$

である．この結果を使うと

$$\begin{aligned} \delta_g I_{em} &= -\int \frac{1}{8\pi c}\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\,dV - \int \frac{1}{16\pi c}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\,\delta dV \\ &= \frac{1}{2c}\int \left[\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right]\delta g_{\mu\nu}\,dV, \end{aligned} \tag{5.42}$$

を得る．最後の $[\cdot]$ 内の表式は，前節で与えた電磁場のエネルギー運動量テンソルの式 (5.5) と確かに一致している．

さて重力の作用汎関数 I_g を決定しよう．(5.36) 式により全作用汎関数 I の規格化が決まり，(5.34) 式からその重力部分 I_g に対する条件式として

$$\delta_g I_g = \frac{1}{2c\kappa}\int \left(-G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}dV, \tag{5.43}$$

を得る．これが成り立つラグランジュ関数 L_g を見つければよい．

L_g は計量テンソルから構成されるスカラー量でなければならない．計量テンソルから構成できるスカラー量は，定数を含めて必ず曲率テンソルの関数である．よって L_g の候補として曲率テンソルの多項式を考えれば

$$L_g = \alpha + \beta R + \gamma_1 R^2 + \gamma_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + \cdots,$$

である．そしてこれに対する作用積分 I_g の $g_{\mu\nu}$ での変分が (5.43) 式を与えなければならない．ところがアインシュタインテンソル $G^{\mu\nu}$ は曲率テンソルに線形であり，宇宙定数項 $\Lambda g^{\mu\nu}$ は曲率に依存しないから，その変分が (5.43) 式のようになる可能性があるのは，ラグランジュ関数がスカラー曲率 R と定数項の線形和の場合だけである．よって

$$I_g = \frac{1}{c}\int (\alpha + \beta R)\, dV\,, \tag{5.44}$$

となるはずである．

この予想を確かめよう．(5.41) 式を使い $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ であることに注意すると

$$\delta_g I_g = \frac{1}{c}\int \left\{ \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\alpha + \beta R) - \beta R^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} + \beta g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right\} dV, \tag{5.45}$$

である．よって後は $\delta R_{\mu\nu}$ を計算すればよい．

リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は接続 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ で表されているから，$\delta R_{\mu\nu}$ を計算するためには $\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ がわかればよい．これを計算すると

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu\nu} + \delta g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\mu\beta,\nu} + \delta g_{\nu\beta,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\beta}\right) - g^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\sigma} \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left((\delta g_{\mu\beta})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\beta})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\beta}\right),
\end{aligned}$$

を得る．このように接続自身はテンソルではないが，その変分 $\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ はテンソルとして振る舞う．

さて $\delta R_{\mu\nu}$ を $\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ で表すと

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} \\
&\quad + \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\delta\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} - \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\delta\Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} \\
&= \left(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\right)_{;\alpha} - \left(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}\right)_{;\nu}\,,
\end{aligned} \tag{5.46}$$

とやはり $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ の共変微分で与えられる．

(5.46) 式より $\delta_g I_g$ 中の $\delta R_{\mu\nu}$ の項は

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu})_{;\alpha}\ ,$$

とベクトルの発散形に書かれる．よってガウスの定理よりこの項は作用積分の表面項（境界積分項）となり，運動方程式には寄与しない[4]．したがって (5.45) 式は

$$\begin{aligned}\delta_g I_g &= \frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\alpha+\beta R)-\beta R^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}dV\\ &= \frac{1}{c}\int\left(-\beta G^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\alpha g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}dV,\end{aligned}$$

となる．これと (5.43) 式を比較すると $\beta = 1/(2\kappa)$ $\alpha = -\Lambda/\kappa$ であることがわかる．よってアインシュタイン方程式を与える重力の作用汎関数として

$$I_g = \frac{1}{c}\int\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda)dV\ ;\quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}\ , \tag{5.47}$$

を得る．

最後に重力の作用汎関数 I_g の座標不変性の意味に言及しておく．I_g についても無限小座標変換 (5.37) に関して，I_m に対して行ったのと同じ議論を繰り返すと

$$\begin{aligned}\delta_\xi I_g &= \frac{1}{2c\kappa}\int\left(-G^{\mu\nu}-\Lambda g^{\mu\nu}\right)\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}dV\\ &= \frac{1}{c\kappa}\int\left(G^{\mu\nu}+\Lambda g^{\mu\nu}\right)_{;\nu}\xi_\mu dV \equiv 0,\end{aligned}$$

を得る．これは自明な $g^{\mu\nu}$ の共変微分の項を除けば縮約されたビアンキ恒等式にほかならない．

---

[4] 通常の系に対して変分原理を適用する場合，その変数の境界上での変分をゼロとすれば十分であるが，いまの場合，スカラー曲率 R が $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含んでいるために，作用積分の境界面上で $\delta g_{\mu\nu}=0$ に加えて $\delta g_{\mu\nu,\alpha}=0$ も要求する必要がある．これを避けたければ，作用積分にあらかじめラグランジュ関数の 2 階微分項を打ち消すような表面項を付け加えておけばよい．

これと同様の結果はアインシュタイン方程式に対する作用汎関数だけでなく，計量のみに依存する座標不変な作用積分すべてについて成り立つ．すなわち任意の $\tilde{I} = \int \tilde{L} dV$ に対して，$\tilde{L}$ が計量テンソルのみから構成されたスカラー関数ならば $\tilde{I} = \tilde{I}[g_{\mu\nu}]$ であるから，それに付随する恒等式，

$$W^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0\,; \quad W^{\mu\nu} := \frac{\delta \tilde{I}}{\delta g_{\mu\nu}}\,, \tag{5.48}$$

が必ず存在する．このことからわかるように，アインシュタインの一般相対論はニュートン重力の拡張理論として唯一ではまったくない．最小限の拡張という点がユニークなのである．

問　題

5.1　弱い重力場（ニュートン極限）でのリーマンテンソルをニュートンの重力ポテンシャル ϕ_N で表せ．またその結果を使って時間的測地線束の測地線偏差の方程式を書き下し，それがニュートン重力理論での潮汐効果の式と一致することを確かめよ．

5.2　作用関数が

$$I_\phi = \frac{1}{c}\int \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - V(\phi)\right) dV,$$

で与えられる実スカラー場 ϕ に関して，その運動方程式とエネルギー運動量テンソルの表式を求めよ．

5.3　電荷 e，質量 m をもつ点粒子の作用関数は，電磁場との相互作用項を含めて

$$I_p = \int \left(\frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(z)\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu + \frac{e}{c} A_\mu(z)\dot{z}^\mu\right) d\tau\,; \quad \dot{z}^\mu = \frac{dz^\mu(\tau)}{d\tau}\,,$$

と表される．ここで $z^\mu(\tau)$ は粒子軌道，τ は粒子の固有時間である．よってこの荷電粒子と電磁場の全作用関数は，I_p と (5.40) 式で与えた I_{em} の和 $I_{tot} = I_p + I_{em}$ で与えられる．

(a)　I_p を粒子の座標 z^μ で変分して，その運動方程式を導け．

(b)　I_{tot} を A_μ で変分して，荷電粒子が存在するときのマックスウェル方程式を導け．

(c)　I_p を $g_{\mu\nu}$ で変分して，この荷電粒子のエネルギー運動量テンソル $T_p^{\mu\nu}$ を求めよ．

(d)　電磁場と粒子のエネルギー運動量テンソルを合わせると，その和がエネルギー運動量保存則を満たすことを確かめよ．

6　漸近的平坦な球対称時空

アインシュタイン方程式の解の中で，最も単純であるにもかかわらず非常に豊富な物理的内容をもった解がシュバルツシルト解である．無限遠でミンコフスキー時空に近づく時空を漸近的平坦な時空 (asymptotically flat spacetime) という．孤立した天体が作る重力場は漸近的平坦と考えられる．そして漸近的平坦な真空の球対称時空解がシュバルツシルト解である．この章ではシュバルツシルト解とそれに関連した漸近的平坦な球対称時空の構造を考察する．

6.1　シュバルツシルト解

アインシュタイン方程式の応用として最初に知りたいと思うのは，球対称な質量 M の星（あるいは質点）がその外部に作る重力場の相対論版はどのようなものになるか，であろう．ニュートン力学では質量 M の質点が作る真空中の重力ポテンシャルは $\phi_N = -GM/r$ である．これに対応する仮定として，時空は真空であり，その重力場は球対称で時間に依存せず（定常）かつ時間反転で不変である，とするのが自然である．定常かつ時間反転不変であることを静的という．ところで一般相対論では重力場は時空の構造そのものであるから，この仮定は時空が真空で球対称静的であることを意味する．そこで時空が球対称かつ静的であるときの計量の一般形をまず求めよう．

時空が球対称である，とは時空上の任意の点 P に対して P を含む 2 次元球面 S^2 が存在し，その球面上の運動に対して計量が不変に保たれることである．4.1 節で議論したように計量を不変に保つ運動に対しては，それに付随したキリングベクトル場が必ず存在する．そしてそこで例示したように，S^2 上の運動に対しては $SO(3)$ の代数 (4.81) 式を満たす三つのキリングベクトルが存在する．

このとき計量は明らかに

$$ds^2 = g_{AB}(x^C)dx^A dx^B + r(x^C)^2 d\Omega^2; \quad (A, B, C = 0, 1), \tag{6.1}$$

と書ける．ここと以降で $d\Omega^2$ は単位 2 次元球面上の線素，

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

を表す．さて $r = r(x^C)$ を新しい x^1 座標に取り直し，$x^0 = ct$ とすれば

$$ds^2 = g_{00}(t,r)c^2dt^2 + 2g_{01}(t,r)c\,dtdr + g_{11}(t,r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \tag{6.2}$$

となる．

さらに時空が静的であるためには計量が時間座標 t に依存せず，かつ $t \to -t$ の変換で不変でなければならない．よって $g_{01} = 0$ であり計量は最終的に

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}c^2dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \tag{6.3}$$

と書ける．幾何学的な言葉でいい換えれば，時空が静的であるとは，空間的超曲面 Σ に垂直な時間的キリングベクトル場が存在することである．いまの場合 Σ は $t=$一定面であり，キリングベクトルは (6.3) 式の座標に対して $\xi^\mu_{(0)} = (1,0,0,0)$ で与えられる．

上の仮定に基づいてアインシュタイン方程式を解くために，まずリッチテンソル，アインシュタインテンソルの具体形を計算しておく．ここで 3.4 節で示した接続の計算例を思い出すと，計量 (6.3) 式は (3.27) 式と同じ形をしている．したがってその結果の式 (3.31) で単に $A(r) \to e^{\nu(r)}$，$B(r) \to e^{\lambda(r)}$ とおき換えれば接続係数がすぐに求まり，

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{01} = \frac{\nu'}{2}\,,\\
&\Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\,,\ \Gamma^1{}_{11} = \frac{\lambda'}{2}\,,\ \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\lambda}\,,\ \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\,,\\
&\Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}\,,\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta\,,\\
&\Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}\,,\ \Gamma^3{}_{23} = \cot\theta\,,\ \text{他の}\ \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \equiv 0,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

である．ここでプライムは r 微分を表し ($' = d/dr$)，座標は $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$ とした．

この結果をリッチテンソルの定義式,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} ,$$

に代入して計算すると

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] , \\ R_{11} &= -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} , \\ R_{22} &= 1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right] , \\ R_{33} &= \sin^2\theta\, R_{22} , \quad \text{他の } R_{\mu\nu} \equiv 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

を得る．ここで R_{22} と R_{33} が自明な $\sin^2\theta$ の係数を除いて一致しているのは時空の球対称性のためである．またスカラー曲率は

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= e^{-\lambda}\left[-\nu'' - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] + \frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right]\right) , \end{aligned} \tag{6.6}$$

となる．これらをアインシュタインテンソルの定義, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ に代入して

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{e^{\nu}}{r^2}\left[1 - e^{-\lambda}(1 - r\lambda')\right] , \\ G_{11} &= -\frac{e^{\lambda}}{r^2}\left[1 - e^{-\lambda}(1 + r\nu')\right] , \\ G_{22} &= \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right] , \\ G_{33} &= \sin^2\theta\, G_{22} , \quad \text{他の } G_{\mu\nu} \equiv 0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

を得る．

さてアインシュタイン方程式を解こう．時空が真空であるから $T_{\mu\nu} = 0$, すなわち

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \iff R_{\mu\nu} = 0,$$

である．よって $R_{\mu\nu}=0$ を解いても $G_{\mu\nu}=0$ を解いてもよいが，後者で解いた方がアインシュタイン方程式の構造がよりよく見えてくるため，ここでは後者で考える．

まず (6.7) 式で G_{00} が

$$G_{00}=\frac{e^{\nu}}{r^2}\frac{d}{dr}[r(1-e^{-\lambda})], \tag{6.8}$$

と書けることに注意すると，$G_{00}=0$ はすぐ積分できて

$$1-e^{-\lambda}=\frac{r_g}{r} \iff e^{\lambda}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \tag{6.9}$$

を得る．ここで r_g は積分定数である．次に G_{00} と G_{11} の表式を比べると，$G_{00}=G_{11}=0$ であるためには

$$\frac{d}{dr}(\nu+\lambda)=0,$$

が成り立つ．よって C を積分定数として

$$\nu=-\lambda+C \iff e^{\nu}=e^{C}\left(1-\frac{r_g}{r}\right), \tag{6.10}$$

である．一方 $G_{22}=0$ （または $G_{33}=0$）は $\nu'=-\lambda'$ を代入すると

$$-\lambda''+\lambda'^2-2\frac{\lambda'}{r}=0,$$

を得るが，これは独立な方程式を与えない．すなわち G_{00} の表式に r^2 を掛けてもう一度 r 微分し，$G_{00}=0$ を再び使うと

$$\begin{aligned}\left[e^{\lambda}-(1-r\lambda')\right]'&=\lambda'e^{\lambda}+\lambda'+r\lambda''=\lambda(1-r\lambda)+\lambda'+r\lambda''\\&=r\left(\lambda''-\lambda'^2+2\frac{\lambda'}{r}\right)=0,\end{aligned}$$

となり，$G_{22}=0$ は自動的に成り立つ．これは縮約されたビアンキ恒等式のためである．

(6.9) 式と (6.10) 式より計量は

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)e^{C}c^2\,dt^2+\frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}+r^2d\Omega^2,$$

となる．ここで g_{00} の定係数 e^C は，時間座標 t の定数スケール変換で吸収できるため物理的意味はない．ところでこの計量は $r \to \infty$ で平坦な時空になる．すなわち漸近的平坦な時空である．そこで便宜上 t を $r \to \infty$ で通常の時間に一致するように選べば $e^C = 1$ である．これより最終的に

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2, \tag{6.11}$$

を得る．この解をシュバルツシルト解 (Schwarzschild solution)，この解が表す時空をシュバルツシルト時空という．特にシュバルツシルト時空の計量を (6.11) 式で表現したとき，その座標をシュバルツシルト座標という．

シュバルツシルト解は球対称，静的，真空，という三つの仮定の下に導かれたが，実は球対称な真空解は（静的という仮定をおかなくても）シュバルツシルト解が唯一の解であることが知られている．これをバーコフの定理 (Birkhoff's theorem) という．これはニュートン重力における真空のポアソン方程式の球対称解は，$\phi_N = -GM/r$ が唯一の解であることの相対論版である．

さてシュバルツシルト解は漸近的平坦な時空であるから，r が十分大きいところでニュートン的な球対称重力場と一致するはずである．そこで (6.11) 式で $r \gg r_g$ とすると

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left[1 + \frac{r_g}{r} + O\left(\left(\frac{r_g}{r}\right)^2\right)\right] dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

を得る．これと，ニュートン近似では $h_{00} = g_{00} + 1 = -2\phi_N/c^2$ ($x^0 = ct$ に注意) であったことを思い出すと

$$\frac{r_g}{r} = -\frac{2\phi_N}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r},$$

より積分定数 r_g は

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \tag{6.12}$$

で与えられることがわかる．

上の考察より明らかにシュバルツシルト解は質量 M の球対称星の外部時空の計量を与えている．しかし，(6.11) 式からわかるように，$r = r_g$ で $g_{00} = 0$, $g_{11} = \infty$ となり計量が特異になるように見える．これはシュバルツシルト時空

の $r=r_g$ 付近では重力が非常に強くなり，ニュートン重力的イメージでは捉えられない大きな時空の歪みが起こっていることを示唆している．この歪みのもたらす現象に関しては，次の第7章で議論するが，$r=r_g$ の特異性に関しては，それが座標の取り方による見掛け上の特異性であることを6.4節で示す．一方 $r=0$ の点でも $g_{00}=\infty$，$g_{11}=0$ と計量が特異になるが，これは曲率が発散する真の特異点である．

(6.12) 式で与えられる半径 r_g のことを（質量 M の星の）シュバルツシルト半径または重力半径といい，$r=r_g$ の面をシュバルツシルト面という．通常の星の r_g がどの程度の大きさであるかを太陽を例にとって評価してみよう．太陽の質量は $M=M_\odot=2\times10^{33}\,\mathrm{g}$ であるから，

$$r_{g\odot}=\frac{2GM_\odot}{c^2}\approx 3\times10^5\,\mathrm{cm}=3\,\mathrm{km},$$

である．一方太陽半径は $R_\odot\approx7\times10^{10}\,\mathrm{cm}$ であり，$r_{g\odot}$ が $R_\odot$ に比べて十分に小さいため $r=r_g$ の特異性は問題にならない．しかし中性子星など超高密度のコンパクト星では，質量は太陽とほとんど同じであるが半径は 10 km 程度となり一般相対論的時空構造が重要になってくる．

6.2 球対称星の内部時空

この節では球対称で静的な星の相対論的内部構造について考察しよう．星が静的であるということはそれが力学平衡にあることを意味するが，星を構成する物質が流体であればそれはまた局所熱平衡にあると考えてよい．そこでエネルギー運動量テンソルとして完全流体の場合を考え，圧力がエネルギー密度の関数として与えられるとしよう．このとき，

$$T_{\mu\nu}=\left(\rho+\frac{1}{c^2}p\right)u_\mu u_\nu+pg_{\mu\nu}\,;\quad p=p(\rho),\ u_\mu u^\mu=-c^2, \tag{6.13}$$

である．一方星が球対称静的であれば時空も球対称静的であるはずだから計量は (6.3) 式と同形である．よって4元速度の成分は規格化条件より $g_{00}(u^0)^2=-c^2$ であるから

$$u^0=\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}},\qquad u_0=-c\sqrt{-g_{00}},\qquad u^i=u_i=0, \tag{6.14}$$

で与えられる．

これより $T_{\mu\nu}$ のゼロでない成分は

$$T_{00} = \rho(u_0)^2 = e^\nu \rho c^2 , \qquad T_{11} = p g_{11} = e^\lambda p ,$$
$$T_{22} = p g_{22} = r^2 p , \qquad T_{33} = \sin^2\theta \, T_{22} , \tag{6.15}$$

で与えられる．よってアインシュタイン方程式は $G_{\mu\nu}$ の表式 (6.7) より

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} : \quad \frac{e^\nu}{r^2} \left[r(1-e^{-\lambda}) \right]' = \frac{8\pi G}{c^4} e^\nu \rho c^2 , \tag{6.16}$$

$$G_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} : \quad \frac{\nu'}{r} - \frac{e^\lambda}{r^2}(1-e^{-\lambda}) = \frac{8\pi G}{c^4} e^\lambda p , \tag{6.17}$$

$$G_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} : \quad \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2} \left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 p , \tag{6.18}$$

である．

また物質の運動方程式はエネルギー運動量保存則で与えられるが，いまの場合，静的で球対称という条件のために $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ の $\mu = 0$ と $\mu = 2, 3$ の成分は恒等的に成り立つ．よって自明でない方程式は

$$T^{1\nu}{}_{;\nu} = 0 : \quad \frac{\nu'}{2}(\rho c^2 + p) + p' = 0, \tag{6.19}$$

のみとなる．

真空の場合と同様に，アインシュタイン方程式の $(2,2)$-成分は独立な方程式を与えない．いまの場合，$(0,0)$-成分と $(1,1)$-成分の式が満たされ $T^{1\nu}{}_{;\nu} = 0$ が満たされると，縮約されたビアンキ恒等式のおかげで $(2,2)$-成分は自動的に満たされる．よって (6.16), (6.17), (6.19) の 3 式を解けばよい．

まず (6.16) 式は

$$M(r) := 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr , \tag{6.20}$$

とおくと，星の中心 $(r = 0)$ で計量が正則であることを要求して

$$1 - e^{-\lambda} = \frac{2GM(r)}{c^2 r} \iff e^\lambda = \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} , \tag{6.21}$$

と積分される．これからわかるように $M(r)$ は半径 r 内の重力質量を表しており，星の外部では $M(r)=$定数となりシュバルツシルト時空の質量に一致する．ここで $M(r)$ が星の固有質量とは異なっていることに注意すべきである．星の固有質量 M_p は質量密度に空間の 3 次元体積要素を掛けて積分したものであり，

$$M_p(r) = 4\pi \int_0^r \rho e^{\lambda/2} r^2 dr = 4\pi \int_0^r \rho \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} r^2 dr, \quad (6.22)$$

で与えられる．$M_p(r)$ と $M(r)$ との差は重力の束縛エネルギーによる．実際，重力が十分に弱い極限 $(2GM(r)/c^2 \ll r)$ で考えると

$$E_B := (M - M_p)c^2 \approx -4\pi \int_0^r \rho \frac{GM}{r} r^2 dr, \quad (6.23)$$

となり，確かにニュートン重力の束縛エネルギーに一致する．

次に (6.17) 式に (6.21) 式を代入して書き直すと

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{e^\lambda}{r}(1 - e^{-\lambda}) + \frac{8\pi G}{c^4} e^\lambda pr = \frac{2G\left(M(r)c^2 + 4\pi r^3 p\right)}{c^4 r^2 \left(1 - \dfrac{2GM(r)}{c^2 r}\right)}, \quad (6.24)$$

を得る．一方 (6.19) 式は

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{\rho c^2 + p} \frac{dp}{dr}, \quad (6.25)$$

と書ける．(6.24), (6.25) 式より $d\nu/dr$ を消去すると

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\left(\rho + \dfrac{p}{c^2}\right)\left(M(r) + \dfrac{4\pi r^3 p}{c^2}\right)}{r^2 \left(1 - \dfrac{2GM(r)}{c^2 r}\right)}, \quad (6.26)$$

を得る．すぐにわかるようにこの式は $c^2 \to \infty$ の極限でニュートン重力の静水圧平衡の式に還元する．よってこれは相対論的な圧力と重力の力学平衡を表す式である．(6.26) 式をトールマン・オッペンハイマー・ボルコフの静水圧平衡の式 (Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation of hydrostatic equilibrium; TOV 方程式) という．この式からわかるように，相対論的には圧力も重力に寄与し物質をより縮める方向に働く．ただしその寄与には常に $1/c^2$ の因子が付随しているため，通常の物質ではほとんど効かないのである．

これらの方程式から実際に星の内部解を求めるには，状態方程式 $p = p(\rho)$ と中心密度 $\rho(0) = \rho_c$ を与えて TOV 方程式 (6.26) を解き，$\rho(r), p(r)$ を求め，それを (6.21) 式や (6.24) 式（あるいは (6.25) 式）に代入して $\nu(r), \lambda(r)$ を求めればよい．ここではしかし最も簡単な例として $\rho =$一定の一様密度の星を考えよう：

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\,; & r \le R\,, \\ 0\,; & r > R\,. \end{cases} \tag{6.27}$$

このとき $M(r)$ はすぐに求まり，

$$M(r) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 = M\dfrac{r^3}{R^3}\,; & r \le R\,, \\ \dfrac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 = M\,; & r > R\,, \end{cases} \tag{6.28}$$

を得る．ここで $M = M(R)$ は星の全質量である．これより $g_{11} = e^{\lambda}$ は

$$e^{\lambda(r)} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{-1}; & r \le R, \\ \left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}; & r > R, \end{cases} \tag{6.29}$$

で与えられる．

圧力は ρ が一定に保たれるための条件から決まる．(6.28) 式を TOV 方程式 (6.26) に代入すると

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = -\frac{4\pi G r}{3c^2}\frac{(\rho_0 + \tilde{p})(\rho_0 + 3\tilde{p})}{\left(1 - \dfrac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2\right)},$$

となる．ここで $\tilde{p} = p/c^2$ とおいた．この両辺を $(\rho_0 + \tilde{p})^2$ で割って，$\left[(\rho_0 + 3\tilde{p})/(\rho_0 + \tilde{p})\right]' = 2\rho_0\tilde{p}'/(\rho_0 + \tilde{p})$ に注意すると，この式は積分できて

$$\left(\frac{\rho_0 + 3\tilde{p}(r)}{\rho_0 + \tilde{p}(r)}\right) = \left(\frac{\rho_0 + 3\tilde{p}_c}{\rho_0 + \tilde{p}_c}\right)\left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{1/2}, \tag{6.30}$$

を得る．ここで $\tilde{p}_c = p_c/c^2$，p_c は中心の圧力である．一方星の表面で圧力はゼロでなければならないから，(6.30) 式で $r = R$ とおくと中心圧力と半径（あるいは全質量）との関係が求まる：

$$1 = \left(\frac{\rho_0 + 3\tilde{p}_c}{\rho_0 + \tilde{p}_c}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2}.$$

これを再び (6.30) 式に代入して p について解けば

$$p(r) = \rho_0 c^2 \frac{\left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{1/2}}, \tag{6.31}$$

を得る．特に中心密度は

$$p_c = \rho_0 c^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2} - 1}, \tag{6.32}$$

である．

残りは $g_{00} = -e^{\nu}$ である．(6.24) 式に (6.31) 式を代入して積分すると

$$e^{\nu(r)} = C' \left[3\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{1/2}\right]^2,$$

を得る．ここで C' は積分定数である．ところで星の外部はシュバルツシルト解で与えられるはずだから，$r = R$ で (6.11) 式と一致させると C' が決まり，結局

$$e^{\nu(r)} = \left[\frac{3}{2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}\right)^{1/2}\right]^2, \tag{6.33}$$

を得る．

こうして (6.29), (6.33) 式が一定密度の星の内部時空の計量を与える．この解をシュバルツシルトの内部解という．ところで中心圧力の式 (6.32) を見ると，$2GM/(c^2R) \to 8/9$ で p_c が発散することがわかる．すなわち有限の圧力で星を支えるためには，その半径が

$$R > R_c := \frac{9}{8}\frac{2GM}{c^2} = \frac{9}{8}r_g, \tag{6.34}$$

を満たさなければならない．この半径の下限は密度が一定の星を仮定して求めたが，実は任意の状態方程式の星に対しても $d\rho/dr \leq 0$ である限り，この下限以下の半径をもつ静的で球対称な星は存在しえないことを示すことができる．

逆にいえば，質量 M をもった物質を半径 R_c 以内に詰め込むと，それは必ず重力崩壊を起こして潰れてしまうことを意味する．

6.3 ブラックホール

前節で星が安定に存在するためには，その半径 R がシュバルツシルト半径 r_g の 9/8 倍より大きくなければならないことを見た．そこでこの限界半径を越えて潰れていく星を考えると，その星の表面は必ずシュバルツシルト面を通り越してより小さくなっていくはずである．するとこの星の重力崩壊のあとにはシュバルツシルト面があらわになった時空が残る．そこで $r = r_g$ 付近の時空構造がどのようになっているのか，シュバルツシルト面はどのような性質をもっているのかを調べなければならない．

いま $r =$ 一定に留まる観測者を考え，その固有時間を考えると

$$-ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2. \qquad (6.35)$$

ここで θ, φ も一定とする．以後も角度方向の運動は考えない．よって座標時間 t の時間間隔と固有時間 τ のそれとには

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\,\Delta t, \qquad (6.36)$$

なる関係がある．これより $r \to r_g$ で任意の Δt に対して $\Delta\tau \to 0$ となる．また $r < r_g$ では $\Delta\tau$ は虚数になってしまう．これは，いかなる観測者も $r \leq r_g$ では $r =$ 一定には留まることができないことを意味している．いい換えると，$r < r_g$ では $r =$ 一定は空間的超曲面になっている．

具体的に $r =$ 一定の観測者がどのようなものか調べるために，$r = r_1$ と $r = r_2$ $(r_1 < r_2)$ の 2 点に留まる観測者 O_1, O_2 を考え，O_1 $(r = r_1)$ から O_2 $(r = r_2)$ に向かって光で信号を送ったとしよう．図 6.1 に示すように観測者 O_1 が時刻 $t = t_1$ から Δt_1 の時間発した光を観測者 O_2 が $t = t_2$ から Δt_2 の時間で受け取ったとする．光の経路は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = 0,$$

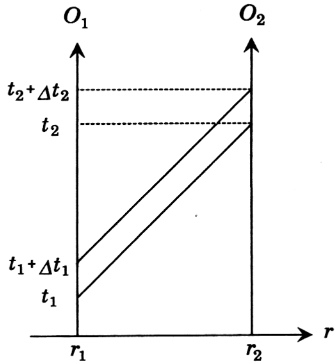


図 6.1

で与えられる．よって

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)} = c\int_{t_1}^{t_2} dt = c\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} dt\,, \tag{6.37}$$

が成り立つ．これから明らかに

$$\Delta t_1 = \Delta t_2\,, \tag{6.38}$$

がわかる．(6.36) 式より，このそれぞれの座標時間間隔に対応する観測者の固有時間 $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2$ には

$$\frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_1}}} = \frac{\Delta\tau_2}{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_2}}}\,, \tag{6.39}$$

なる関係がある．

さて観測者 O_1, O_2 それぞれにとっての光の振動数を ν_1, ν_2 とすると，観測者 O_1 が固有時間 $\Delta\tau_1$ の時間内に発する光の全振動回数 N は，観測者 O_2 が固有時間 $\Delta\tau_1$ の時間内に受け取る全振動回数に等しい：

$$N = \nu_1\Delta\tau_1 = \nu_2\Delta\tau_2\,. \tag{6.40}$$

したがって (6.39) 式と (6.40) 式より

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_1}}}{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_2}}}\,, \tag{6.41}$$

を得る．特に観測者 O_2 を無限遠方 $(r \to \infty)$ におくと

$$\nu_\infty = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}\,\nu_1\,, \qquad \Delta\tau_\infty = \frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_1}}}\,, \tag{6.42}$$

である．明らかに $\nu_\infty < \nu_1$, $\Delta\tau_\infty > \Delta\tau_1$ である．すなわち遠方の観測者から見ると，$r = r_1$ にある物体は赤くゆっくり動くように見える．この効果を通常波長 λ の伸び：

$$z := \frac{\lambda_\infty}{\lambda_1} - 1 = \frac{\nu_1}{\nu_\infty} - 1, \tag{6.43}$$

で表し，z を一般に赤方偏移という．いまの場合のように，赤方偏移の原因が重力にあるときは特に重力的赤方偏移という．そして $r_1 \to r_g$ で z は発散する．これは遠方の観測者から $r = r_g$ の面は決して見えず，したがってその内側ももちろん見えないことを意味している．

一般に，4 元速度 u^μ の観測者の見る 4 元運動量 k^μ の光の振動数 ν は $h\nu = -k_\mu u^\mu$ で与えられる（h はプランク定数）．これより赤方偏移の一般式は発光源の 4 元速度を u_s^μ，観測者の 4 元速度を u_0^μ, 光の 4 元運動量を k^μ とし，発光源上の世界点を P_1，それを受け取る観測者の世界点を P_2 とすると

$$z = \frac{(k_\mu u_s^\mu)_{P_1}}{(k_\mu u_0^\mu)_{P_2}} - 1, \tag{6.44}$$

となる．これからわかるように，赤方偏移の原因は時空の重力場による光の 4 元運動量の変化と発光源や観測者の 4 元速度に起因するドップラー効果の両方が効いている．そこで発光源が $r = r_g$ に近づいたとき，その 4 元速度 u_s^μ がいかなるものであっても z が発散するかどうかを調べてみよう．

以下の 7.2 節で示すように，動径方向に運動する光の 4 元運動量は，E を定数として

$$k^\mu = E\left(e^{-\nu}, 1, 0, 0\right); \quad e^\nu = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right),$$

で与えられる．一方 u_s^μ はその規格化条件から $\alpha(r)$ を任意関数として

$$u_s^\mu = c\left(\sqrt{\alpha^2+1}\,e^{-\nu/2}, \alpha e^{\nu/2}, 0, 0\right),$$

と書ける．これらより

$$-g_{\mu\nu}k^\mu u_s^\nu = \frac{E\,c\,e^{-\nu/2}}{\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha} = \frac{E\,c}{\sqrt{1-r_g/r}\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)}\,,$$

を得る．これから明らかに $r \to r_g$ で $\alpha \to +\infty$ としない限り $z \to \infty$ となる．$\alpha \to +\infty$ ということは，4 元速度が外向き（r が増加する方向）に向いて無限に光速に近づくことである．これから $r=r_g$ に留まる軌道は外向きのヌル軌道であることが予想される．実際 6.4 節においてこの予想が確かに成り立つことを示す．

このように $r=r_g$ はヌル面になっており，その内側からいかなる情報も外には到達しえない．そこで $r=r_g$ の面を事象の地平面 (event horizon) といい，事象の地平面をもつ時空をブラックホールという．その名のとおり，外側からは決して事象の地平面内は見えず，したがって「黒く見える」からである．図 6.2 に星が重力崩壊していく状況の概念図を示す．そこに描かれているように光円錐は r が r_g に近づくに従って内側に傾いていき，$r = r_g$ で 45 度傾き $r = r_g$ 面と接する．その内側では光円錐は 45 度以上傾き，いかなるものも（光さえも）$r =$一定には留まれない．

シュバルツシルト時空の $r < r_g$ の領域についてもう少し議論しておく．上で指摘したように $r =$一定面は空間的超曲面である．いい換えると外側と反対に r が時間的座標，t が空間的座標になっている．そして時空の計量は相変わらず座標 t には依存しない．よって $r =$一定の空間は非等方であるが一様な空間

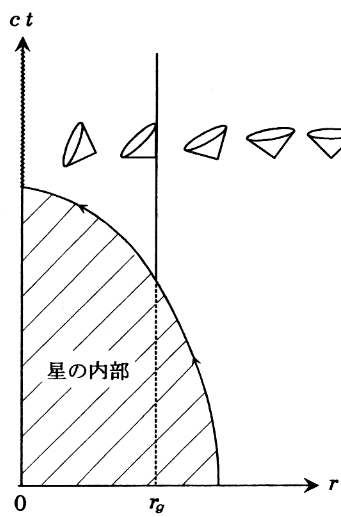


図 6.2

である．またその空間体積は t 積分が発散することより無限大である．一方計量は明らかに“時間” r には依存している．すなわち事象の地平面内は動的な空間体積が無限大の空間的に一様非等方な宇宙を表している．その空間の位相は実数空間と球面の直積 ($\boldsymbol{R} \times S^2$) である．この空間的位相構造をもった宇宙を一般にカントフスキー・ザックス (Kantowski-Sachs) 型宇宙という．

6.4 クルスカル拡張

時空の大局的な因果構造を理解するために最もよい方法はその時空上のヌル測地線の振る舞いを調べ，できれば計量をヌル座標を使って表すことである．ヌル座標とはその座標一定の超曲面がヌルになるような座標であり，ミンコフスキー時空でいえば先進ヌル座標や遅延ヌル座標（$x_\pm = x^0 \pm x^1$ など）がそうである．シュバルツシルト時空の場合は球対称であるから動径方向のヌル測地線を解けばよい．そこで (6.37) 式に戻って考えるとまず動径方向の空間座標として

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \dfrac{r_g}{r}}, \tag{6.45}$$

なる座標を導入すると $ct \pm r^*$ がヌル座標になって便利であることがわかる．(6.45) 式を積分すると積分定数を適当に選んで

$$r^* = r + r_g \ln\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right), \tag{6.46}$$

を得る．r^* は r の変化に従って

$$\begin{cases} r \to +\infty & \Longleftrightarrow \quad r^* \to +\infty, \\ r \to r_g & \Longleftrightarrow \quad r^* \to -\infty, \end{cases}$$

なる振る舞いをする．この座標をシュバルツシルト時空の亀座標 (tortoise coordinate) という．これは r^* がどれだけ減少しても（$r^* \to -\infty$）決して事象の地平面に到達できないためである．

いまシュバルツシルト時空がブラックホールを表していると考えると，興味のあるヌル測地線はブラックホールへ落ち込む軌道である．そこでヌル座標として

$$v := ct + r^*, \tag{6.47}$$

なる先進ヌル座標を導入すると，

$$c\,dt = dv - dr^* = dv - \frac{dr}{1-\dfrac{r_g}{r}},$$

であるから線素は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dv^2 - 2dv\,dr + r^2 d\Omega^2, \tag{6.48}$$

と表される．これをエディントン・フィンケルシュタイン (Eddington-Finkelstein) 座標という．注意すべき点は dv^2 の係数が $r=r_g$ でゼロになるが，v がヌル座標であるためそこは座標の特異点ではないことである．これは，計量テンソルの行列式を計算すると $\sqrt{-g}=r^2\sin\theta$ となり，$r=r_g$ に特異点をもたないことからもわかる．よってこの座標で表された計量テンソルは r のすべての領域 $(0<r<\infty)$ で正則である．このようにシュバルツシルト座標における $r=r_g$ の特異性は，座標の取り方による見掛け上のものであることが示された．一方 $r=0$ はこの座標においても特異であり真の曲率特異点である．

(6.48) 式で v, θ, φ を一定とすると，$ds^2=0$ でありブラックホールへまっすぐ落ち込む動径方向のヌル測地線を表している．すなわち v=一定面はヌル超曲面である．一方 r=一定を考えると θ, φ も一定として，$r>r_g$ では $ds^2<0$, $r<r_g$ では $ds^2>0$, $r=r_g$ では $ds^2=0$ である．よって r =一定面は $r>r_g$ で時間的，$r<r_g$ では空間的，$r=r_g$ はヌル超曲面であることがわかる．この様子を，θ, φ が表す 2 次元球面の次元を落とした時空図で表すと図 6.3(a) のようになる．この図から事象の地平面が確かに外向きのヌル超曲面になっていることが見て取れる．

ヌル座標として，先進ヌル座標 v の代わりに遅延ヌル座標，

$$u := ct - r^*, \tag{6.49}$$

を採用するとシュバルツシルト時空の線素は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)du^2 + 2du\,dr + r^2 d\Omega^2, \tag{6.50}$$

となる．これもエディントン・フィンケルシュタイン座標と呼ばれる．この場合も先進ヌル座標を使った場合と同様に計量は $0<r<\infty$ の全領域で正則であ

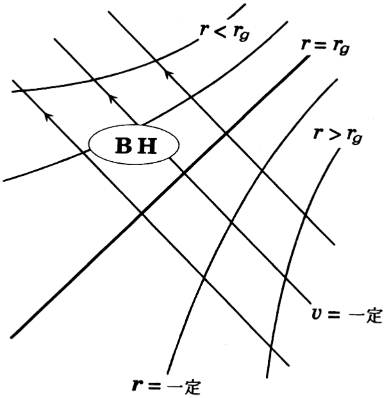


図 6.3(a)

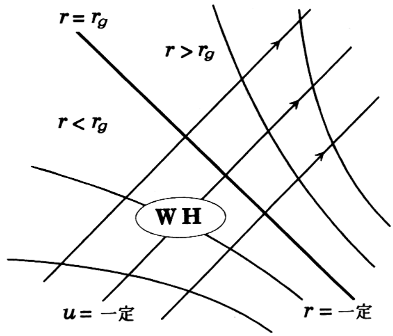


図 6.3(b)

る．また $u=$一定と $r=r_g$ がともにヌル超曲面であることも同じである．違いは $u, \theta, \varphi=$一定が外向きの動径方向に進むヌル測地線を表す点である．よって $r=r_g$ は内向きのヌル超曲面となる．このことは，$r=r_g$ がいかなる物もその中には入れないというブラックホールの事象の地平面とは反対の性質をもっていることを意味する．図 6.3(b) は遅延ヌル座標を使ったエディントン・フィンケルシュタイン座標が表す時空図である．(6.48) 式がブラックホールを表すのに対応して，(6.50) 式が表す時空をホワイトホールと呼ぶ．そして前者の $r=r_g$ 面を未来の事象の地平面，後者のそれを過去の事象の地平面という．実際二つの計量を比べるとそれが時間反転の関係にあることは明らかであろう．

エディントン・フィンケルシュタイン座標は (v,r) か (u,r) かにかかわらず，もともとシュバルツシルト座標から出発して得た座標であるから，それらの $r>r_g$ の時空領域はシュバルツシルト座標が表す $r>r_g$ の時空領域と一致しており，したがってどちらも同じ時空領域を表しているはずである．このことはシュバルツシルト時空がブラックホールとホワイトホールの両方を同時に含んでいることを意味している．

これを確かめ，シュバルツシルト時空の因果構造を明らかにしよう．まずシュバルツシルト座標に戻って，$r>r_g$ の領域で座標変換 $(ct,r)\to(u,v)$ を実行すると

$$ds^2=-\left(1-\frac{r}{r_g}\right)du\,dv+r^2d\Omega^2, \tag{6.51}$$

を得る．ここで r は

$$r^* = r + r_g \ln\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right) = \frac{1}{2}(v - u)\,,$$

によって陰関数的に与えられる u, v の関数 $r = r(u, v)$ と見なす．(6.51) 式にさらに座標変換 $(u, v) \to (U, V)$:

$$U := -\exp\left(-\frac{u}{2r_g}\right), \qquad V := \exp\left(\frac{v}{2r_g}\right), \tag{6.52}$$

を施すと

$$\begin{aligned} du\,dv &= (2r_g)^2 \exp\left(\frac{u - v}{2r_g}\right) dU\,dV \\ &= (2r_g)^2 \exp\left(-\frac{r^*}{r_g}\right) dU\,dV \\ &= \frac{4r_g^3}{r - r_g} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) dU\,dV\,, \end{aligned}$$

となるから

$$ds^2 = -\frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) dU\,dV + r^2 d\Omega^2, \tag{6.53}$$

を得る．ここで r は

$$UV = -\exp\left(\frac{r^*}{r_g}\right) = -\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right), \tag{6.54}$$

で決まる U, V の関数 $r = r(U, V)$ である．(6.53) 式の座標をクルスカル (Kruskal) 座標という．ヌル座標 (U, V) の代わりに

$$T := \frac{1}{2}(V + U), \qquad R := \frac{1}{2}(V - U), \tag{6.55}$$

によって時間的座標 T と空間的座標 R で線素を表すこともでき，

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) \left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2 d\Omega^2; \\ T^2 - R^2 &= -\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right), \end{aligned} \tag{6.56}$$

となる．

さて U, V の定義式 (6.52) が示すように，いままでは $r > r_g$ の仮定に対応して $U < 0,\ V > 0$ を前提として議論を進めてきた．しかし，結果の式 (6.53) と r を決める式 (6.54) を見ると，U, V のいかなる値に対しても r は一意的に決まり，$U \geq 0$ または $V \leq 0$ としても計量に何の特異性も現れない．すなわちクルスカル座標は，出発点の U, V の定義域を越えてシュバルツシルト座標の $r > r_g$ の領域が解析的に拡張された時空を表している．具体的に U, V の正負によって r の値域を考えると

$$
\begin{aligned}
&\text{領域 I}:\ U < 0,\ \ V > 0\ \Rightarrow r_g < r < \infty\,, \\
&\text{領域 II}:\ U > 0,\ \ V > 0\ \Rightarrow 0 < r < r_g\,, \\
&\text{領域 III}:\ U < 0,\ \ V < 0\ \Rightarrow 0 < r < r_g\,, \\
&\text{領域 IV}:\ U > 0,\ \ V < 0\ \Rightarrow r_g < r < \infty\,,
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

の四つの領域に分かれる．図 6.4 はこの拡張されたシュバルツシルト時空の時空図である．これをクルスカル図 (Kruskal diagram) という．

それぞれの領域が互いに接している $U = 0$, または $V = 0$ のヌル超曲面は $r = r_g$ の事象の地平面である．領域 I を我々がいる時空領域とすると，領域 II がブラックホールの内部，領域 III がホワイトホールの内部を表す．また領域 IV は領域 I とまったく同じ構造をもつ別の世界である．領域 I と IV は $U = V = 0$ の点（実際には 2 次元球面）を通してつながっている．図 6.5 は $U + V = 0$ ($\Longleftrightarrow\ T = 0$) の空間的超曲面の概念図であり，二つの世界が半径 $r = r_g$ ののどを通して結び付いている様子を表している．この構造をアインシュタイン・ローゼン橋 (Einstein-Rosen bridge) と呼ぶ．ちなみに図 6.5 は $T = 0,\ \theta = \pi/2$ の 2 次元空間，

$$
ds^2 = \frac{4r_g^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_g}\right)dR^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)} + r^2 d\varphi^2\,,
$$

を 3 次元ユークリッド空間中の 2 次元曲面として表したものである．具体的には 3 次元ユークリッド空間の線素，

$$
ds_E^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,
$$

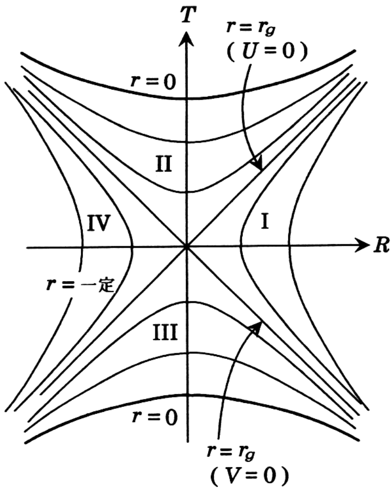


図 6.4

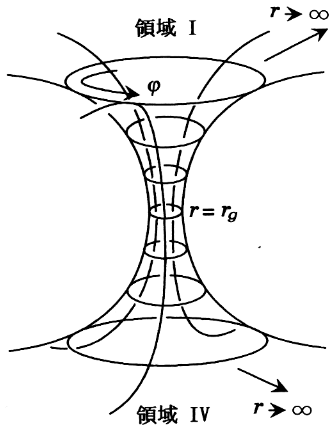


図 6.5

に対して $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ とおいて

$$dr^2 + dz^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)},$$

を解けばよく, $x^2 + y^2 = r^2$, $z^2 = 4r_g(r - r_g)$ である. このような操作を埋め込み (embedding) といい, 空間の曲率や位相的構造を視覚的に捉えることができる便利な方法である.

このようにシュバルツシルト時空は単に星の外部重力場やブラックホールを表すだけでなく, ホワイトホールやアインシュタイン・ローゼン橋等の極めて一般相対論的な時空構造を同時に表しているのである. クルスカル座標はシュバルツシルト時空の解析的に拡張できる最大の時空領域を表しており, これをシュバルツシルト時空のクルスカル拡張 (Kruskal extension) あるいは (解析的) 最大拡張 (maximal (analytic) extension) という.

問　　題

6.1　1 次の計量,

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\dfrac{R_g}{R}}{1+\dfrac{R_g}{R}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{R_g}{R}\right)^4 (dR^2 + R^2 d\Omega^2),$$

は，シュバルツシルト時空を表すことを示せ．このとき，R_g は通常のシュバルツシルト座標の r_g とはどのような関係にあるか．また，この座標で $R=0$ はどのような点か．

6.2　重力質量 M の一様密度の球対称星の固有質量 M_p を星の表面 $r=R$ での重力の強さ $r_g/R = 2GM/c^2R$ の関数として求めよ．また $r_g/R \to 8/9$ の極限での値を計算せよ．

6.3　質量 $1.5M_\odot$，半径 12.5 km の球対称星の表面から発せられた光を無限遠方の観測者が見たときの赤方偏移を計算せよ．

7　シュバルツシルト時空上の粒子軌道

シュバルツシルト時空は，星やブラックホールのような孤立した天体の外部重力場の典型的な例を与えている．そこで強い重力場とは具体的にどのようなものであるかを把握し，その中で起こりうる相対論的現象を理解する手段として，シュバルツシルト時空上の測地線軌道を調べることは非常に有益である．

7.1　有限質量粒子の軌道

3.3 節の議論に基づいて，質量 μ の粒子に対するラグランジュ関数を

$$L = \frac{1}{2}\mu g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ; \quad \dot{} = \frac{d}{d\lambda}, \tag{7.1}$$

と取る．このとき，一般論よりアフィンパラメーター λ を粒子の固有時間 τ と考えてよい．これからオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと

$$(\mu g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu)^{\cdot} - \frac{1}{2}\mu g_{\alpha\beta,\mu}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \tag{7.2}$$

となる．この式において，シュバルツシルト座標 $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ に対する計量テンソルの成分 $g_{\alpha\beta}$ は座標 ct, φ に依存しない．そのため粒子の 4 元運動量，

$$p_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \mu g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \tag{7.3}$$

の 0-成分と 3-成分の τ 微分はゼロとなる：

$$\dot{p}_0 = \dot{p}_3 = 0.$$

これより

$$E := -p_0 c = -\mu g_{00}\dot{x}^0 c = \mu c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\dot{t}, \tag{7.4}$$

$$L_z := p_3 = \mu g_{33}\dot{x}^3 = \mu r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}, \tag{7.5}$$

の二つの運動の積分を得る．これらはもちろん粒子のエネルギーと角運動量の z-成分という意味をもつ．さらに，時空が球対称であることから一般性を失わずに軌道が赤道面上（$\theta = \pi/2$）にあるとしてよい．このとき明らかに $p_2 = 0$ である．よって (7.4), (7.5) の両式より

$$\dot{t} = \frac{\tilde{E}}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\tilde{L}_z}{r^2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \tag{7.6}$$

を得る．ここで

$$\tilde{E} = \frac{E}{\mu c^2}, \qquad \tilde{L}_z = \frac{L_z}{\mu}, \tag{7.7}$$

であり，それぞれ単位静止エネルギー当たりのエネルギー，単位静止質量当たりの角運動量を表す．E（または $\tilde{E}$）は定義により，未来向きの軌道に対しては正であり過去向きの軌道に対しては負である．以下では $E > 0$ とする．また一般性を失うことなく $L_z \geq 0$ と考えてよい．

上ではシュバルツシルト時空の計量の具体形を使って保存量を見つけたが，時空の対称性を表すキリングベクトル場が存在することを使うと，より系統的な（他の時空にも応用可能な）方法で同様の結果を得ることができる．まず (7.2) 式を

$$\frac{Dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \tag{7.8}$$

と書き直しておく．ここでキリングベクトル ξ^μ がキリング方程式,

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 2\xi_{(\mu;\nu)} = 0,$$

を満たすことを使い，$p^\mu = \mu(dx^\mu/d\tau)$ に注意すると

$$\frac{d}{d\tau}(\xi_\mu p^\mu) = \xi_{\mu;\nu} p^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + \xi_\mu \frac{Dp^\mu}{d\tau} = 0, \tag{7.9}$$

を得る．これよりキリングベクトル ξ^μ が存在するとそれに対応して $p_\xi := \xi^\mu p_\mu$ が測地線に沿って保存することがわかる．

シュバルツシルト時空におけるキリングベクトルは，時間推進に関するもの一つ ($\xi^\mu_{(0)}$) と球対称性に関するもの三つ ($\xi^\mu_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$) の計四つある．それらをシュバルツシルト座標に対する成分で表すと，前者は

$$\xi^\mu_{(0)} = (1, 0, 0, 0), \tag{7.10}$$

で与えられ，後者の三つは，4.1 節で与えた 2 次元球面上のキリングベクトル $\xi^A_{(i)}$ を 4 次元に拡張した表式，

$$\begin{aligned}
\xi^\mu_{(1)} &= (0, 0, \cos\varphi, -\cot\theta\,\sin\varphi),\\
\xi^\mu_{(2)} &= (0, 0, \sin\varphi, \cot\theta\,\cos\varphi),\\
\xi^\mu_{(3)} &= (0, 0, 0, 1),
\end{aligned}\tag{7.11}$$

で与えられる．これより測地線に沿っての保存量として

$$\begin{aligned}
p_{(0)} &:= \xi^\mu_{(0)} p_\mu = p_0\,,\\
p_{(1)} &:= \xi^\mu_{(1)} p_\mu = p_2 \cos\varphi - p_3 \cot\theta\,\sin\varphi\,,\\
p_{(2)} &:= \xi^\mu_{(2)} p_\mu = p_2 \sin\varphi + p_3 \cot\theta\,\cos\varphi\,,\\
p_{(3)} &:= \xi^\mu_{(0)} p_\mu = p_3\,,
\end{aligned}\tag{7.12}$$

を得る．$p_{(0)}$, $p_{(3)}$ は明らかに，それぞれ (7.4), (7.5) 式の E $(= -p_{(0)}c)$, L_z $(= p_{(3)})$ と同じである．残りの $p_{(1)}$, $p_{(2)}$ はそれぞれ角運動量の x-成分と y-成分を表すが，初期 $(\tau = 0)$ に $\theta(0) = \pi/2$, $p_2(0) = 0$ と取れば $p_{(1)} = p_{(2)} = 0$, すなわち角運動量は z-成分のみとなり，軌道は常に $\theta = \pi/2$ 面上に留まる．こうして (7.6) 式と同じ結果を得る．

さて測地線に沿ってラグランジュ関数 L が一定であること，あるいは 4 元速度の規格化条件から

$$\frac{2L}{\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c^2,$$

が成り立つ．これを具体的に書くと

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)} + r^2\dot{\varphi}^2 = -c^2, \tag{7.13}$$

である．(7.6) 式を (7.13) 式に代入して整理すると

$$\dot{r}^2 + V(r) = \tilde{E}^2 c^2\,; \quad V(r) := \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}_z^2}{c^2 r^2}\right)c^2, \tag{7.14}$$

を得る．これより粒子の動径方向の運動は，$V(r)$ で与えられるポテンシャル中のエネルギー $\tilde{E}^2 c^2$ をもつ粒子の運動として捉えることができる．特に $r_g = 2GM/c^2$

を考慮して $c^2 \to \infty$ の極限を考えると，

$$V_N(r) := \frac{1}{2}\lim_{c^2\to\infty}\left(V(r) - c^2\right) = -\frac{GM}{r} + \frac{\tilde{L}_z^2}{2r^2},$$

となり，$V(r)$ はニュートン重力の動径方向の（単位質量当たりの）ポテンシャルに帰する．そこでこのポテンシャル $V(r)$ の振る舞いを調べることによってシュバルツシルト時空の測地線軌道の相対論的性質を調べよう．

ポテンシャル $V(r)$ の極値を調べると，$dV/dr = 0$ となる r が一般に 2 点あり，それらは

$$r_\pm = \frac{\tilde{L}_z^2}{r_g c^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 c^2}{\tilde{L}_z^2}}\right); \quad \frac{dV}{dr}(r_\pm) = 0, \tag{7.15}$$

で与えられる．これより $V(r)$ は角運動量が $\tilde{L}_z^2 > 3r_g^2c^2 = 18(GM)^2$ のときに極大点，極小点をもち，$\tilde{L}_z^2 = 3r_g^2c^2$ でそれらが融合して変曲点となり，$\tilde{L}_z^2 < 3r_g^2c^2$ では極値をもたない単調な関数となることがわかる．

まず $\tilde{L}_z^2 > 3r_g^2c^2$ の場合を考えよう．このとき，$V(r)$ は図 7.1(a) に示したように $r = r_+$ で極小点をもち，$r = r_-$ で極大点をもつ．ここで

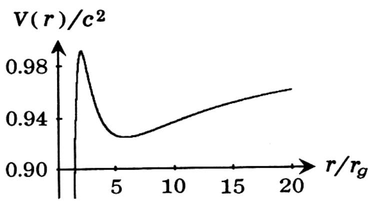
$$\tilde{E}_\pm := \sqrt{V(r_\pm)/c^2}, \tag{7.16}$$

とすると $\tilde{E}_- > \tilde{E}_+$ であり，

$$\tilde{E}_- \gtrless 1 \iff \tilde{L}_z^2 \gtrless 4r_g^2c^2,$$

であることがわかる．したがって $\tilde{E}_- > 1$ のときの軌道を考えると，粒子のもつエネルギーによって（$r < r_-$ でのみ存在する軌道を除けば），

$$\tilde{E}_+ \le \tilde{E} < 1: \quad \text{束縛軌道},$$



$\tilde{L}_z = 1.98\, r_g c$

図 7.1(a)

$$\begin{aligned} 1 \le \tilde{E} < \tilde{E}_- &: \quad 散乱軌道, \\ \tilde{E} = \tilde{E}_- &: \quad 不安定円軌道, \\ \tilde{E}_- < \tilde{E} &: \quad 落下軌道, \end{aligned}$$

の 4 種類に分類される．また $\tilde{E}_- < 1$ のときは

$$\begin{aligned} \tilde{E}_+ \le \tilde{E} < \tilde{E}_- &: \quad 束縛軌道, \\ \tilde{E} = \tilde{E}_- &: \quad 不安定円軌道, \\ \tilde{E}_- < \tilde{E} &: \quad 落下軌道, \end{aligned}$$

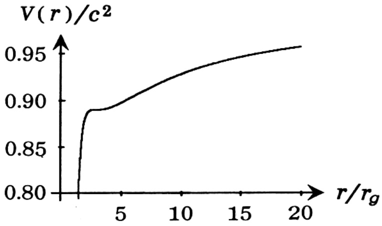
となる．したがって $\tilde{L}_z^2 > 3r_g^2c^2$ の場合には，$\tilde{E}_-$ の値にかかわらずニュートン重力でのケプラー運動に対応する軌道が存在し，特に $\tilde{E} = \tilde{E}_+$ の軌道は安定な円軌道を与える．しかしニュートン重力にない特徴は $\tilde{E} \ge \tilde{E}_-$ の軌道の存在である．ニュートン重力では角運動量による遠心力障壁が $1/r^2$ で無限に高くなり，粒子は決して $r = 0$ には到達しないが，一般相対論では重力が遠心力障壁に勝って強くなるためポテンシャルに極大点が生じ，不安定な円軌道やブラックホールへ落ち込む軌道が現れるのである．また $\tilde{E} = \tilde{E}_-$ のときは無限遠方からブラックホールへ近づいてきて，$r = r_-$ に螺旋軌道を描きながら無限回巻き付く軌道（とその時間反転軌道）も存在する．

角運動量が減少するに従って安定な円軌道の半径 $r = r_+$ は次第に減少する．そして角運動量が $\tilde{L}_z^2 = 3r_g^2$ になったとき，ポテンシャル $V(r)$ は図 7.1(b) に示すように極値がなくなり，半径が

$$r_c := 3r_g = \frac{6GM}{c^2}, \tag{7.17}$$

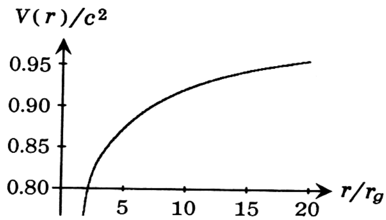
で変曲点のみをもつ．すなわち安定な束縛軌道が存在しなくなる．さらに角運動量が減少して $\tilde{L}_z^2 < 3r_g^2$ となると，ポテンシャルは図 7.1(c) のようになり，もはやいかなる束縛軌道も存在できず，すべての軌道はブラックホールへ落ち込む軌道となる．よって r_c は可能な安定円軌道の最も内側の限界半径を与える．$r = r_c$ の軌道を最内部安定円軌道 (inner-most stable circular orbit) という．このとき粒子のエネルギーは束縛軌道中で最小値を取る：

$$\tilde{E} = \tilde{E}_c := \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428. \tag{7.18}$$



$\tilde{L}_z = \sqrt{3}\, r_g c$

図 7.1(b)



$\tilde{L}_z = 1.5\, r_g c$

図 7.1(c)

いい換えれば重力による束縛エネルギーは

$$E_B := E - \mu c^2 = \mu c^2(\tilde{E}_c - 1) \approx -0.0572\mu c^2.$$

この重力的束縛エネルギーがいかに大きいかは，原子核の結合エネルギーと比べてみるとわかる．原子核の結合エネルギーは 1 核子 (∼ 1 GeV) 当たり 8 MeV 程度であるから静止質量の 0.8% 程度である．すなわち，いかなる核反応よりも，ブラックホール近傍に物質を運びその重力エネルギーを解放させる方がはるかに効率的にエネルギーが取り出せるのである．このことは宇宙にブラックホールが存在すれば，その近傍で非常に大きなエネルギー現象が起こる可能性を示唆している．そして観測的にブラックホールであると信じられている天体のまわりでは，実際にそうした巨大なエネルギー現象が観測されている．

7.2　ゼロ質量粒子の軌道

質量がゼロの粒子に対しては，前節の議論において (7.1) 式のラグランジュ関数で質量 μ の係数を取り除き，ドット $(\dot{\ })$ はアフィンパラメーター λ に関する微分に戻して $p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$，$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ とすればよい．その結果 (7.6) 式は

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)c^2}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{L_z}{r^2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \tag{7.19}$$

と変更され，(7.13) 式の代わりに

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)} + r^2\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{7.20}$$

が成り立ち，(7.14) 式は

$$\dot{r}^2 + V(r) = \frac{E^2}{c^2}\,; \quad V(r) := \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{L_z^2}{r^2}, \tag{7.21}$$

と変更される．

明らかに $V(r)$ は $r \to \infty$ と $r \to r_g$ の両端でゼロになる．また $V(r)$ には L_z の値にかかわらず唯一の極大値があり，その位置も L_z によらず，

$$r_m = \frac{3}{2}r_g\,; \quad \frac{dV}{dr}(r_m) = 0, \tag{7.22}$$

で決まる．そこでの V の値は

$$V_m = V(r_m) = \frac{4L_z^2}{27r_g^2}\,, \tag{7.23}$$

である．ポテンシャル $V(r)$ の様子を図 7.2 に示した．

(7.21) 式において，アフィンパラメーターを

$$\lambda \;\to\; \lambda' = \frac{E\lambda}{c}\,,$$

と取り直せば

$$\dot{r}^2 + \tilde{V}(r) = 1\,; \quad \tilde{V}(r) := \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}, \tag{7.24}$$

と書き直せることがわかる．ここで b は

$$b := \frac{L_z c}{E}\,, \tag{7.25}$$

である．この定義から明らかに，b はブラックホールに対する光の衝突係数 (impact parameter) の意味をもつ．

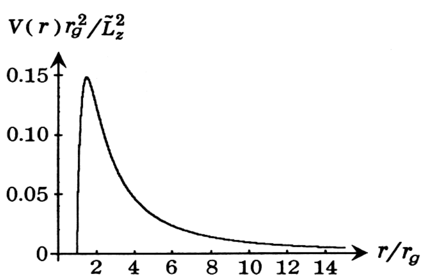


図 7.2

これより軌道が E や L_z のそれぞれの値にはよらずに，その比 b だけで決まることがわかる．そこで b の大小で軌道を分類すれば，

$$b_c := \frac{3\sqrt{3}}{2}\, r_g\,, \tag{7.26}$$

なる臨界衝突係数に対して

$$\begin{aligned} b > b_c &: \quad \text{散乱軌道}, \\ b = b_c &: \quad \text{不安定円軌道}, \\ b < b_c &: \quad \text{落下軌道}, \end{aligned}$$

の 3 種類が存在する．特に，不安定ではあるがブラックホールを周回する円軌道がゼロ質量粒子に対しても存在することは，ニュートン的描像とはまったく異なる相対論固有の現象である．

7.3 近星点移動と光の屈折

7.1 節と 7.2 節で求めたシュバルツシルト時空上の測地線軌道の方程式を，具体的にいくつかの場合について解き，そこに現れる相対論的効果をニュートン理論の結果と比較して調べよう．

(a) 有限質量粒子の束縛軌道

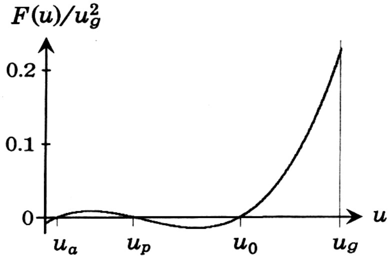
まず有限質量粒子の場合を考える．(7.6) の $\dot{\varphi}$ の式と (7.14) の $\dot{r}$ に対する式から

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(\tilde{E}^2-1)c^2}{\tilde{L}_z^2} + \frac{c^2}{\tilde{L}_z^2}\frac{r_g}{r} - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right),$$

を得る．ニュートン力学でもやるように，$u = 1/r$ なる変数を導入すると $du = -dr/r^2$ より上式は

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = F(u)\,; \quad F(u) := -\frac{(1-\tilde{E}^2)c^2}{\tilde{L}_z^2} + \frac{c^2}{\tilde{L}_z^2}\frac{u}{u_g} - u^2 + \frac{u^3}{u_g}\,,\ u_g := \frac{1}{r_g}\,, \tag{7.27}$$

と書き直せる．



$\tilde{L}_z = 2.05\ r_g c$

$\tilde{E} = 0.98$

図 7.3

ここで問題を束縛軌道に限ると $F(u)$ は図 7.3 に示したように $u>0$ で三つのゼロ点 u_a, u_p, u_0 $(0<u_a<u_p<u_0<u_g)$ をもつ．束縛軌道は $F(u)\geq 0$ で u の動く範囲が有限の領域にある．よって $u_a \leq u \leq u_p$ であり，u_a, u_p はそれぞれ軌道の遠星点 (apastron)，近星点 (periastron) に対応する．これより $F(u)$ は

$$F(u) = \frac{1}{u_g}(u-u_a)(u_p-u)(u_0-u),$$

と因数分解できる．したがって (7.27) 式は積分形に直して

$$\varphi(u) = \pm \int_{u_a}^{u} \frac{\sqrt{u_g}\, du'}{\sqrt{(u'-u_a)(u_p-u')(u_0-u')}}, \qquad u_a \leq u \leq u_p, \quad (7.28)$$

となる．ここで遠星点 $u=u_p$ で $\varphi=0$ とし，$\pm$ の符号は $\dot{\varphi}>0$ とすれば，それぞれ遠星点通過前 (−) と通過後 (+) に対応する．これは楕円積分であり φ は楕円関数で表現される．特に近星点から次の近星点まで（あるいは遠星点から次の遠星点まで）を 1 周期とすると，その間にまわる角度 $\Delta\varphi$ は

$$\Delta\varphi = 2\int_{u_a}^{u_p} \frac{\sqrt{u_g}\, du}{\sqrt{(u-u_a)(u_p-u)(u_0-u)}} = \frac{2\sqrt{u_g}}{\sqrt{u_0-u_a}} K\left(\sqrt{\frac{u_p-u_a}{u_0-u_a}}\right), \quad (7.29)$$

で与えられる．ここで $K(k)$ は完全楕円積分であり，$k \ll 1$ で

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4)\right], \quad (7.30)$$

と展開される．

(7.28) 式は一般の相対論的束縛軌道に対して成り立つが，そのままでは相対論的効果が見えにくい．そこで軌道がほとんどニュートン的である領域を考え，ニュートン重力からのずれを調べてみよう．まず $F(u)=0$ に対する根と係数の関係より

$$u_a + u_p + u_0 = u_g \,,$$

が成り立つことを利用して $F(u)$ が

$$F(u) = (u-u_a)(u_p-u)\left(1-\frac{u_a+u_p+u}{u_g}\right),$$

と書けることに注意する．ここで軌道がほぼニュートン的であるとすると，近星点の半径 r_p が中心星の重力半径 r_g に比べて非常に大きいこと，$r_p \gg r_g$ すなわち $u_g \gg u_p$ を使って $F(u)$ を近似すると，(7.28) 式は

$$\varphi(u) \approx \int_{u_a}^{u} \frac{\left(1+\dfrac{u_a+u_p+u'}{2u_g}\right)du'}{\sqrt{(u'-u_a)(u_p-u')}} \,,$$

と近似できる．これより $\Delta\varphi$ は初等関数で評価できて

$$\Delta\varphi \approx 2\left(1+\frac{3}{4}\frac{u_a+u_p}{u_g}\right)\pi = 2\pi + \frac{3}{2}\frac{u_a+u_p}{u_g}\pi \,, \tag{7.31}$$

を得る．これはもちろん (7.29) 式で完全楕円積分の展開式 (7.30) を使っても得ることができる．またそれを使えばより高次のポストニュートン効果を計算することもできる．

上式の右辺第 2 項は，ニュートン重力では存在せず相対論固有の効果であり，ニュートン重力からのずれは 1 周期で近星点（あるいは遠星点）がその項の分だけ余分に前進する現象として現れる．これを相対論的近星点移動 (periastron shift) という．その項を $\Delta\varphi_p$ とすると

$$\Delta\varphi_p = \frac{3}{2}\frac{u_a+u_p}{u_g}\pi = \frac{3GM}{c^2}\left(\frac{r_a+r_p}{r_a r_p}\right), \tag{7.32}$$

である．特に軌道がほぼ円軌道に近い場合は

$$\Delta\varphi_p \approx 6\pi\frac{GM}{rc^2} \,, \tag{7.33}$$

となる．

アインシュタインが一般相対論の検証の一つとして計算し，水星の近日点移動を説明した話しは有名である．水星の場合，その公転軌道半径 $r \approx 5.55 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}$ と太陽の重力半径 $2GM_{\odot}/c^2 \approx 2.95 \times 10^5\,\mathrm{cm}$ から

$$\Delta\varphi_p \approx 5 \times 10^{-7}\,,$$

を得る．周期が $T = 2\pi(r^3/GM)^{1/2} \approx 0.24\,\mathrm{yr}$ であることを使うと近日点は 100 年で $43''$ だけ進む．この結果が，他の惑星等の様々な摂動を考慮してもニュートン重力では説明不可能だった観測データを完全に説明し，一般相対論の大きな検証の一つとなったのである．

(b)　ゼロ質量粒子の散乱軌道

さてゼロ質量粒子の散乱軌道を考えよう．この場合も (7.19) の $\dot{\varphi}$ の式と (7.21) の $\dot{r}$ の式から

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\left[1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right],$$

を得る．ここで再び変数を $u = 1/r$ に変換して，上式を

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = G(u)\,; \quad G(u) := u_b^2 - u^2 + \frac{u^3}{u_g}\,,\ u_b := \frac{1}{b}\,, \tag{7.34}$$

と書き直す．ここで散乱軌道を仮定すると

$$u_b < u_c\,; \quad u_c = \frac{1}{b_c} = \frac{2u_g}{3\sqrt{3}}\,,$$

である．このとき $G(u)$ には三つのゼロ点があり，それらを小さい方から順に u_-, u_+, u_0 とすると，$u_- < 0 < u_+ < u_0 < u_g$ である．これより

$$G(u) = \frac{1}{u_g}(u - u_-)(u_+ - u)(u_0 - u)\,,$$

と書ける．ここで $u_\pm, u_0$ は

$$u_+ + u_- + u_0 = u_g\,,$$

を満たす．$G(u)$ の振る舞いを図 7.4 に示した．$u \to +0$ で $r \to +\infty$ となるから散乱軌道は $0 < u \leq u_+$ の領域を動く．$u = u_+$ は中心の星（あるいはブラッ

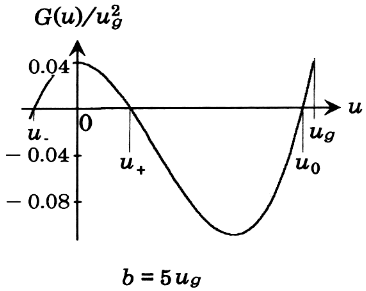


図 7.4

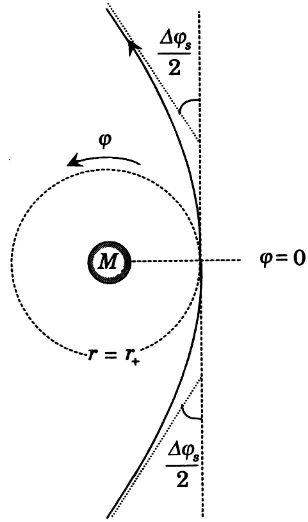


図 7.5

クホール）に最も近づいた転回点の半径 $r_+ = 1/u_+$，$\tilde{V}(r_+) = 1$ に対応する (図 7.5)．

(7.34) 式を積分すると，$\varphi(u_+) = 0$ とおいて

$$\varphi(u) = \pm \int_u^{u_+} \frac{\sqrt{u_g}\, du'}{\sqrt{(u' - u_-)(u_+ - u')(u_0 - u')}}, \tag{7.35}$$

を得る．ここで ± の符号はそれぞれ散乱前 (−) と散乱後 (+) に対応する．これも楕円積分である．図 7.5 からも明らかにように，まったく散乱されないときの φ の全変化量は π であるから，全散乱角を $\Delta\varphi_s$ とおくと

$$\Delta\varphi_s = 2\int_0^{u_+} \frac{\sqrt{u_g}\, du}{\sqrt{(u - u_-)(u_+ - u)(u_0 - u)}} - \pi, \tag{7.36}$$

である．有限質量粒子の $\Delta\varphi$ と違っていまの場合の $\Delta\varphi_s$ は完全楕円積分では表せない．

実際に星やブラックホールの重力によって光がどの程度曲げられるか調べるために，散乱が十分重力場の弱いところで起こった場合について近似計算をしてみよう．すなわち

$$\frac{u_b}{u_g} = \frac{2GM}{c^2 b} \ll 1,$$

と仮定する．まず $G(u)$ のゼロ点 $u_0, u_\pm$ の大きさを評価しておく．(7.34) 式で $u_g \to \infty$ とするとこの極限で $u_\pm \to \pm u_b$, $u_0 \to u_g$ となることがわかる．よって (7.34) 式に u_0 を代入して

$$\frac{u_0}{u_g} = 1 - \frac{u_b^2}{u_0^2} \approx 1 - \frac{u_b^2}{u_g^2}\,, \tag{7.37}$$

を得る．また (7.34) 式に $u_\pm$ を代入して

$$\frac{u_\pm}{u_b} = \pm\sqrt{1 + \frac{u_\pm^3}{u_g u_b^2}} \approx \pm\left(1 \pm \frac{u_b}{2u_g}\right)\,,$$

を得る．特に (7.37) 式に，関係式 $u_+ + u_- + u_0 = u_g$ を使うと

$$\frac{u_+ + u_-}{u_g} \approx \left(\frac{u_b}{u_g}\right)^2\,, \tag{7.38}$$

を得る．

この近似の下に全散乱角の式 (7.36) を変形すると u/u_g の 1 次までの精度で

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_s &= 2\int_0^{u_+} \frac{du'}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)\left(1 - \dfrac{u_+ + u_- + u}{u_g}\right)}} - \pi \\ &\approx 2\int_0^{u_+} \frac{\left(1 + \dfrac{u}{u_g}\right)du}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} - \pi \\ &= 2\int_0^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} + \frac{u_b}{u_g} - \pi\,,\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_0^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{u_+}{-u_-}} \approx \frac{\pi}{2} + \frac{u_b}{2u_g}\,,$$

である．よって弱い球対称重力場による光の屈折角として，最終的に

$$\Delta\varphi_s \approx 2\frac{u_b}{u_g} = \frac{4GM}{bc^2}\,, \tag{7.39}$$

を得る．

例として，太陽表面をかすめる星の像がどれほどずれるかを計算すると，$b = R_\odot \approx 6.96 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}$，$2GM_\odot/c^2 \approx 2.95 \times 10^5\,\mathrm{cm}$ を代入すると

$$(\Delta\varphi_s)_\odot \approx 8.5 \times 10^{-6} = 1''.75$$

である．これをエディントンが 1919 年に日食を利用して観測し，一般相対論の重要な検証になったことは有名である．

7.4　重力レンズ効果

重力によって光が屈折するということは，星や銀河などの天体が光に対してレンズの役割を果たすことを意味する．そしてその効果は常に光をレンズ天体の方へ引き付ける，すなわち凸レンズの役割を果たすことがわかる．これを重力レンズ効果という．この節では，前節の応用として星や銀河などによる重力レンズ効果を考察しよう．

図 7.6 のように光源 S，レンズ天体 L，観測者 O を考え，レンズ天体 L の質量を M，それに対する光の衝突係数を b，観測者とレンズ天体の距離を D_ℓ，レンズ天体と光源の距離を $D_{\ell s}$，観測者と光源の距離を D_s とする．ここで光源 S と観測者 O はともにレンズ天体 L から十分に離れており ($D_s \gg b$, $D_{\ell s} \gg b$)，光の屈折はレンズ天体の近くの点 D で瞬間的に起こると近似できるとする．さらに，レンズ天体 L によって引き起こされる光の屈折角 α が十分小さいと仮定すると，(7.39) 式が使えて

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2},$$

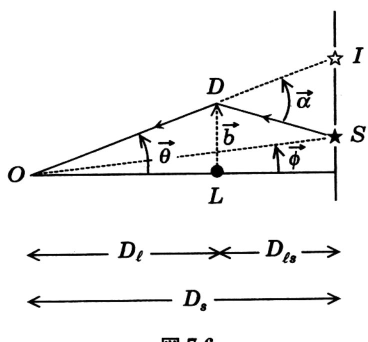


図 7.6

である．このときレンズ天体 L と光の屈折点 D を含む面（レンズ面）と，それと平行な光源 S を含む面（光源面）はそのどちらも光の経路に近似的に垂直であると考えてよい．

図 7.6 から簡単な三角法によって

$$D_{\ell s}\overrightarrow{\alpha} = D_s(\overrightarrow{\theta} - \overrightarrow{\phi}); \quad \overrightarrow{\alpha} = \frac{4GM}{b^2}\overrightarrow{b} = \frac{4GM}{D_\ell \theta^2}\overrightarrow{\theta},$$

が成り立つ．ここで $\overrightarrow{b}$ はレンズ面での衝突係数を表す位置ベクトル，$\overrightarrow{\alpha}$ は屈折角を表す角度ベクトル，$\overrightarrow{\theta}$, $\overrightarrow{\phi}$ はそれぞれ観測者の天球面上での光源の像の位置とレンズがない場合の位置を表す角度ベクトルである．この式を変形すると

$$\overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{\theta} - \alpha_0^2\frac{\overrightarrow{\theta}}{\theta^2}; \quad \alpha_0^2 := \frac{4GMD_{\ell s}}{c^2 D_s D_\ell}, \tag{7.40}$$

を得る．これを（質点的重力レンズに対する）レンズ方程式という．

(7.40) 式で $\overrightarrow{\phi} \propto \overrightarrow{\theta}$ であるから，$\overrightarrow{\theta}$ や $\overrightarrow{\phi}$ をスカラー量と考えてもよい：

$$\phi = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta} \iff \theta^2 - \phi\theta - \alpha_0^2 = 0.$$

これを解いて

$$\theta = \theta_\pm = \frac{1}{2}\left(\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}\right), \tag{7.41}$$

を得る．ここで $\theta_- < 0$ であるが，これはこの像がレンズに対して光源のある側の反対側に見える像であることを意味している．また $\phi = 0$ のときは $\theta_\pm = \pm\alpha_0$ となるが，これは像が天球上に半径が角度 α_0 の円を描くことを意味している．この輪状の像をアインシュタインリング (Einstein ring) といい，角度 α_0 を（一般に $\phi \neq 0$ の場合にも）アインシュタインリング半径という．(7.41) 式より

$$\theta_+ - \theta_- = \sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2} \geq 2\alpha_0,$$

であり，ϕ があまり大きいと重力レンズ効果は観測できないから，$2\alpha_0$ は重力レンズで像が複数個見えるときの像間の分離角の大体の大きさを表している．

レンズ方程式を使って，像の明るさが光源の明るさに対してどれほど明るくなるかを計算できる．観測者から見た像が天球上で張る（無限小）立体角を $d\Omega(\overrightarrow{\theta})$,

観測される光度（エネルギー／時間）を f，光源の表面輝度（エネルギー／時間／立体角）を I とすると

$$f = I d\Omega(\vec{\theta}),$$

である．一方重力レンズがないときに観測するであろう光度を f_0，そのときに像が天球上で張る立体角を $d\Omega(\vec{\phi})$ とすると，表面輝度 I は光源固有のものであるから

$$f_0 = I d\Omega(\vec{\phi}),$$

である．これより，重力レンズによる光度の増幅率は一般に

$$\mathcal{A} := \frac{f}{f_0} = \frac{d\Omega(\vec{\theta})}{d\Omega(\vec{\phi})} = \left(\det \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\theta}}\right)^{-1}, \tag{7.42}$$

で与えられる．これを (7.41) 式の場合に適用すると

$$\mathcal{A}_{\pm} = \frac{d\theta_{\pm}^2}{d\phi^2} = \pm\frac{1}{4}\left(\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+4\alpha_0^2}} + \frac{\sqrt{\phi^2+4\alpha_0^2}}{\phi} \pm 2\right), \tag{7.43}$$

を得る．ここで $\mathcal{A}_+ > 1$，$\mathcal{A}_- < 0$ であるが，これは (1) $\theta = \theta_+$ の像が光源と同一の向きをもつ順像で必ずもとの明るさより明るくなること，(2) $\theta = \theta_-$ の像が光源と向きが反対の逆像であること，を意味している．また，$\theta = \theta_\pm$ の両方の像を足した全増幅率 $\mathcal{A}_{tot}$ は

$$\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_+ + |\mathcal{A}_-| = \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+4\alpha_0^2}} + \frac{\sqrt{\phi^2+4\alpha_0^2}}{\phi}\right), \tag{7.44}$$

で与えられる．

上の計算ではレンズが質点的であるとしたが，実際にはレンズに構造があるとその像の形や数もより複雑になる．一般にレンズ天体が光に対して完全に透明であり，かつニュートン理論で記述される程度にレンズ天体内の重力場が弱ければ，像の数が奇数個になることが知られている．しかし α_0 が複数個の像間の分離角のオーダー評価を与えていることは変わらない．例えば，宇宙論的距離にある銀河団 ($M \sim 10^{14} M_\odot$) によって，それよりさらに遠方の銀河が重力

レンズ効果を受けるとすると $D_{\ell s} \sim D_\ell \sim 1\,\mathrm{Gpc}$ [1]として

$$\alpha_0 \sim 10^{-4} \sim 20'',$$

程度になる．そして，実際に質量の大きい銀河や銀河団などが重力レンズとなって，より遠方の銀河やクェーサー等の像が複数個見えたり，その明るさが増幅されていると考えられる天体が多数観測されている．また像が引き伸ばされて，ほぼアインシュタインリングのようになっているものもある．さらに最近，大マゼラン星雲中の星の光度が 2, 3 週間にわたって最大 6 倍以上に増幅したのが観測され，それが，途中にある小さな星（$M \lesssim 0.1 M_\odot$）が視線を横切ったための重力レンズ効果と考えると観測データが非常によく説明された．これによって，我々の銀河のまわりに多数の小さな暗い星が存在するらしいことが予想され話題を呼んでいる．このように重力レンズ効果は，今やアインシュタイン理論の検証の一つというよりも，宇宙に存在する光では見えない暗い物質の広がりや質量を推定する天文学的な観測手段として重要な役割を果たしている．

問　題

7.1　有限質量の粒子がシュバルツシルト時空上を無限遠から初速度ゼロで動径方向に自由落下する軌道を解き，軌道上の座標時間 t と粒子の固有時間 τ をシュバルツシルト座標 r の関数として表せ．

7.2　問題 7.1 の軌道上から動径方向外向きに粒子が発した光を無限遠で静止した観測者が受け取ったときの赤方偏移を r の関数として表せ．また $r \to r_g$ の極限で t の関数として見るとどのような振る舞いをするか調べよ．

7.3　観測者から距離 50 kpc [2]にある星 S に対して，距離 25 kpc にある質量 $0.1 M_\odot$ の質点と見なせる天体 L が重力レンズとして働くときを考える．

(a)　この重力レンズ系のアインシュタインリング半径 α_0 はいくらか．

(b)　天球上で，この天体 L が星 S のそばを角度 $b\alpha_0$ を衝突係数として相対角速度 $\omega\alpha_0$/sec で直線的に横切ったとき，光源の星 S が $\mathcal{A}_c$ 倍以上増光する期間 Δt を求めよ．$b = 0.2$，$\omega = 10^{-6}$/sec，$\mathcal{A}_c = 1.3$ のとき Δt の値はどれほどで最大何

---

[1] $1\,\mathrm{Gpc} = 3.08 \times 10^{27}\,\mathrm{cm} = 32.6$ 億光年である．
[2] $1\,\mathrm{kpc} = 3.08 \times 10^{21}\,\mathrm{cm} = 3260$ 光年である．

倍増光するか.

(c) さらに星Sが観測者に対して静止しているとすれば天体Lの視線方向へ垂直な速度成分 $V_{\perp}$ の実際の値はいくらか.

8　重　力　波

一般相対論の大きな特徴の一つに時空の動的な揺らぎを表す重力波の存在がある．重力波はリーマン曲率テンソルの成分の中で，リッチテンソルでは表せないワイルテンソルの伝播モードが担っており，物質の自由度とは独立の本来の重力場の自由度である．そのため，重力波の物理を理解することは，一般相対論が予言する時空のダイナミックスの理解のためには欠くことのできない要素である．

8.1　線形化されたアインシュタイン方程式

時空の揺らぎの動的な自由度を明らかにするために，計量がほとんどミンコフスキー的であるとしてそれからの小さな揺らぎを考察しよう．5.3 節の記号に従って計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (\epsilon \ll 1), \tag{8.1}$$

とおき，ϵ の 1 次でのアインシュタイン方程式を考える．このとき $h_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空上で定義されたテンソルと考えてよい．そこで以降は $h_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げはミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ によって行う．例えば

$$h^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\nu} h_{\nu\beta}\,, \qquad h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} h_{\mu\nu}\,,$$

である．また記号の簡単化のために微分に関しても

$$h_{\mu\nu}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\beta}\,,$$

等と書くことにする．

まず接続 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\beta\mu,\nu}+h_{\beta\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\beta}\right)\\ &= \frac{1}{2}\epsilon\left(h^{\alpha}{}_{\mu,\nu}+h^{\alpha}{}_{\nu,\mu}-h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}\right),\end{aligned} \tag{8.2}$$

である．これよりリーマンテンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}+\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}\\ &\approx \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu}\\ &\approx \frac{1}{2}\epsilon\left(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\beta}-h^{\alpha}{}_{\beta,\mu\nu}+h_{\mu\beta}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}-h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\beta}\right),\end{aligned} \tag{8.3}$$

で与えられる．したがってリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}=\frac{1}{2}\epsilon\left(-h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}+h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu}+h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}-h_{,\mu\nu}\right),$$

リッチスカラー R は

$$R\approx\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\approx\epsilon\left(h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu}-\Box h\right),$$

となる．ここで $h=h^{\alpha}{}_{\alpha}$，$\Box=\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}$ とした．よってアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &\approx R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R\\ &\approx \frac{1}{2}\epsilon\left[-\Box h_{\mu\nu}+h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}+h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu}-h_{,\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta}-\Box h\right)\right],\end{aligned} \tag{8.4}$$

で与えられる．

一方物質のエネルギー運動量テンソルも ϵ のオーダーであると仮定し，$T_{\mu\nu}\to\epsilon T_{\mu\nu}$ とおくとアインシュタイン方程式は ϵ の 1 次で

$$-\Box h_{\mu\nu}+h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}+h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu}-h_{,\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta}-\Box h\right)=\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{8.5}$$

となる．これが線形化されたアインシュタイン方程式の一般形である．

さて 4.2 節 (d) 項や 5.4 節で述べたように無限小の座標変換,

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu(x) = x^\mu - \epsilon\xi^\mu, \tag{8.6}$$

に対応して計量は

$$g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon\left(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}\right),$$

と変化する．これをいまの線形化された計量 (8.1) に適用すると，ミンコフスキー計量は不変であるから

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \\ &= h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

を得る．ここで 2 行目の等号は背景の計量がミンコフスキー計量であることを使った．ところで $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ は単なる座標変換で結ばれているのであるから，そのどちらも同じ時空の揺らぎを表している．また $h_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空上のテンソル場と考えられることは既に指摘した．するとこれは一つのテンソルから同じ物理的内容をもつ別のテンソルへの変換になっている．このような変換を一般にゲージ変換という．すなわち無限小座標変換 (8.6) は $h_{\mu\nu}$ に対して (8.7) 式で与えられるゲージ変換を誘起する．

ゲージ変換のよく知られた例は，電磁気学におけるベクトルポテンシャル A_μ に対する変換である．電磁場の強さは

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu},$$

で表され，$F_{\mu\nu}$ は A_μ に対するゲージ変換,

$$A_\mu \to \bar{A}_\mu = A_\mu + \chi_{,\mu}, \tag{8.8}$$

に対して不変である．いまミンコフスキー時空上でマックスウェル方程式を考えると

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = A^{\nu,\mu}{}_{,\nu} - \Box A^\mu = 4\pi j^\mu, \tag{8.9}$$

である．これを A^μ に関して解くときには適当な条件を A^μ に課してゲージを決めてやる必要がある．よく使われるゲージ条件はローレンツゲージ,

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0,$$

である．このゲージが取れることは (8.8) 式より

$$\bar{A}^{\mu}{}_{,\mu} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \Box\chi ,$$

であり，与えられた任意の A^μ に対して $-\Box\chi = A^{\mu}{}_{,\mu}$ が χ について解けることから保証される．

このときマックスウェル方程式は

$$-\Box A^{\mu} = 4\pi j^{\mu} , \tag{8.10}$$

となり，A^μ に関して解ける形となる．またこの式の発散を取ると，A^μ がローレンツゲージ条件を満たすことが電荷の保存則 $j^{\mu}{}_{,\mu}=0$ を保証していることがわかる．逆に j^μ が電荷の保存則を満たしていれば，(8.10) 式を解いて求めた A^μ は自動的にローレンツゲージ条件を満たすことになる．

線形化されたアインシュタイン方程式 (8.5) に対してもまったく同様のことが成り立つ．いま $h_{\mu\nu}$ と等価なテンソル，

$$\psi_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad \left(\Longleftrightarrow \quad h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\psi ,\ \psi = \psi^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \right), \tag{8.11}$$

を定義してやると (8.5) 式は

$$-\Box\psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \psi_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\psi_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \tag{8.12}$$

となる．ここで $\psi_{\mu\nu}$ は，$h_{\mu\nu}$ のゲージ変換 (8.7) に対応して

$$\psi_{\mu\nu} \to \bar{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} , \tag{8.13}$$

なるゲージの自由度をもつ．そこで電磁気を見習って $\psi_{\mu\nu}$ に対するゲージ条件として

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{8.14}$$

を考える．このとき (8.13) 式から

$$\bar{\psi}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Box\xi^{\mu} , \tag{8.15}$$

を得るから，任意の $\psi_{\mu\nu}$ に対して

$$-\Box\xi^{\mu} = \psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} ,$$

が解けることより，ゲージ条件 (8.14) が矛盾なく取れることがわかる．

このゲージ条件の下で (8.12) 式は

$$-\Box\psi_{\mu\nu}=\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\,, \tag{8.16}$$

となり，ちょうどローレンツゲージでのマックスウェル方程式 (8.10) と同様の形になる．このゲージを線形重力場に対するローレンツゲージあるいは調和ゲージ (harmonic gauge) という．またこの場合もマックスウェル方程式の場合と同様に，$\psi_{\mu\nu}$ がローレンツゲージ条件 (8.14) を満たせば（ミンコフスキー時空上での）エネルギー運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ を保証し，またその逆も真である．

8.2　重力波の伝播

前節ではローレンツゲージの下での線形化されたアインシュタイン方程式を導出したが，その形から明らかに $T_{\mu\nu}$ が時間的に変化すれば伝播する $\psi_{\mu\nu}$ の波が生成され，それが光速度で伝わることがわかる．これが重力波である．重力波の発生に関してはひとまず脇において（後の 8.4 節で論じる），この節では重力波の真空中での伝播を考えその性質を考察する．

(a)　TT ゲージ (transverse-traceless gauge)

ローレンツゲージ条件 (8.14) はゲージ変換の式 (8.15) からわかるように

$$\Box\xi^{\mu}=0, \tag{8.17}$$

を満たす ξ^{μ} が誘起するゲージ変換に対して不変である．一方真空中のアインシュタイン方程式は，(8.16) 式で $T_{\mu\nu}=0$ とおいて

$$\Box\psi_{\mu\nu}=0, \tag{8.18}$$

である．(8.17) 式とこの式が同形の方程式であることから，真空中ではさらなるゲージ条件を課して $\psi_{\mu\nu}$ の自由度を制限できることがわかる．

いま真空中を波数 $k^{\mu}=(k,\overrightarrow{k})$ $(k=|\overrightarrow{k}|)$ をもって伝播する重力波を考えると

$$\psi^{\mu\nu}=A^{\mu\nu}\exp(ik_{\mu}x^{\mu})\,,\qquad A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}\,. \tag{8.19}$$

ここで $A^{\mu\nu}$ は重力波の振幅を表す定数である．さてローレンツゲージ条件より

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = ik_\nu A^{\mu\nu}\exp(ik_\mu x^\mu) = 0 \;\Rightarrow\; A^{\mu\nu}k_\nu = 0, \tag{8.20}$$

が成り立つが，このゲージ条件は

$$\xi^\mu = B^\mu \exp(ik_\mu x^\mu),$$

によるゲージ変換で不変である．よって

$$\bar{A}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + i\left(B^\mu k^\nu + B^\nu k^\mu - \eta^{\mu\nu}B^\alpha k_\alpha\right), \tag{8.21}$$

を振幅とする重力波 $\bar{\psi}^{\mu\nu}$ ももとの $\psi^{\mu\nu}$ とまったく同じ物理的内容をもちローレンツゲージを満たす．ここで B^μ のもつ四つの自由度を使うと

$$\bar{A}^{0\mu} = 0, \qquad \bar{A} := \eta_{\mu\nu}\bar{A}^{\mu\nu} = 0, \tag{8.22}$$

と取れることを示そう．

まず (8.21) 式においてそのトレースと $(0,i)$ 成分をゼロとおく：

$$\bar{A} = A + 2i\left(kB^0 - k_iB^i\right) = 0,$$
$$\bar{A}^{0i} = A^{0i} + i\left(k^iB^0 + kB^i\right) = 0. \quad (i = 1,2,3)$$

これを満たす B^μ が存在するかどうかを確かめるために，この式を行列表現すると

$$\begin{pmatrix} k & -k^i \\ k^j & \delta^{ij}k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^0 \\ B^i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} A/2 \\ A^{0j} \end{pmatrix},$$

となる．左辺の k^μ から作られた行列の行列式はゼロでない．ゆえに B^μ は解をもつ．このとき (8.20) 式より $\bar{A}^{00} = \bar{A}^{0i}k_i/k$ であるから $\bar{A}^{0i} = 0 \Rightarrow \bar{A}^{00} = 0$ が成り立つ．よって (8.22) 式を満たすことができる．

このゲージ条件を TT ゲージという．一般に与えられたローレンツゲージでの重力波の振幅 $A_{\mu\nu}$ に対して

$$\bar{A}_{ij} = \left(P_i{}^kP_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)A_{k\ell}; \quad P^{ij} := \delta^{ij} - \frac{k^ik^j}{k^2}, \tag{8.23}$$

によって $\bar{A}_{ij}$ を構成し，$\bar{A}_{0\mu}=0$ とするとこれが TT ゲージを満たしていることがわかる．この右辺の括弧内のテンソルを TT 射影テンソル (TT projection tensor) という．結果をまとめると TT ゲージでは（バー ($\bar{}$) を取り除いて）

$$A^{00}_{TT}=A^{0i}_{TT}=A_{TT}=0, \qquad A^{ij}_{TT}k_j=0, \tag{8.24}$$

である．一般の重力波は波数 k^μ の重ね合わせで表現できるから

$$\psi^{TT}_{00}=\psi^{TT}_{0i}=\psi^{TT}=0, \qquad \psi^{TT}_{ij}{}^{,j}=0, \tag{8.25}$$

となる．ここで TT ゲージであることをあらわにするために添字 TT を付けた．また $h_{\mu\nu}$ と $\psi_{\mu\nu}$ との関係式 (8.11) より

$$h^{TT}_{\mu\nu}=\psi^{TT}_{\mu\nu},$$

である.ちなみに重力波における TT ゲージは電磁気ではクーロンゲージ (Coulomb gauge),

$$A^0=0, \qquad A^i{}_{,i}=0,$$

に対応している．

(b) 重力波の偏極

上の構成法からわかるように TT ゲージではすべてのゲージ自由度が固定されており，TT ゲージを不変に保つゲージ変換はもはや存在しない．したがってこのゲージで表される重力波の自由度が真の物理的自由度を表現している．そこで重力波の物理的自由度がどのようなものか，その偏極 (polarization) を調べよう．

簡単のために $x^i=(x,y,z)$ とし z-軸方向に進む平面波を考える：

$$h^{TT}_{ij}=\psi^{TT}_{ij}=\mathrm{Re}\left(A^{TT}_{ij}e^{-ik(ct-z)}\right).$$

このとき TT ゲージ条件 (8.24) より A^{TT}_{ij} は

$$A^{TT}_{ij}=\begin{pmatrix} A_+ & A_\times & 0 \\ A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

と書ける．すなわち重力波の独立な自由度は二つである．この平面波の重ね合わせに対する計量は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + 2h_\times\,dx\,dy + dz^2\,, \quad (8.26)$$

で与えられる．ここで $h_+ = h_+(ct-z)$, $h_\times = h_\times(ct-z)$ である．これからわかるように重力波はその進行方向に垂直な面上の固有距離の揺らぎを誘起する．具体的には h_+ のモードをもつ重力波が通過すると x-方向の固有距離が伸び（縮み）y-方向が縮む（伸びる）．図 8.1(a) は h_+ モードの概念図である．一方 $h_\times$ は x, y-軸を 45°回転させた座標系，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{pmatrix},$$

に移って考えると

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h_\times)dx'^2 + (1-h_\times)dy'^2 + 2h_+\,dx'\,dy' + dz^2\,,$$

となる．したがって $h_\times$ モードは h_+ モードに対して 45°傾いた方向への固有距離の伸び縮みを表している（図 8.1(b)）．これら二つのモードをプラスモード (h_+)，クロスモード $(h_\times)$ と呼ぶが，もちろんこの呼び方は相対的なものである．

このことをより正確に捉えるために，重力波がない状態で空間座標 (x, y, z) が一定の時間的測地線束に対して，3.5 節 (a) 項で与えた測地線偏差の方程式 (3.43) を考えよう．ここに重力波が到達すると，リーマンテンソルがゼロでなくなり各測地線間の距離が変化する．その値は既に $O(\epsilon)$ であるから ϵ の 1 次では測

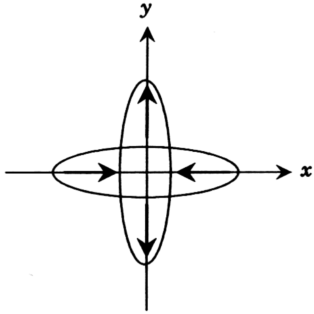


図 8.1(a)

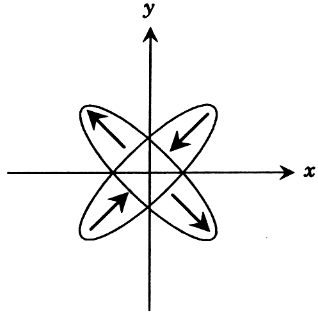


図 8.1(b)

地線に沿ったテトラッド基底は 0 次の座標基底と同一にとってよい：

$$e_{\mu}^{(0)} = (-1,0,0,0),\quad e_{\mu}^{(1)} = (0,1,0,0),\quad e_{\mu}^{(2)} = (0,0,1,0),\quad e_{\mu}^{(3)} = (0,0,0,1).$$

したがって (3.43) 式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(i)} \approx -R^i{}_{0j0}Z^{(j)}, \tag{8.27}$$

と近似できる．$O(\epsilon)$ の精度で (8.26) 式の計量に対するリーマンテンソルの $R^i{}_{0j0}$ 成分は (8.3) 式より

$$R^i{}_{0j0} = -\frac{1}{2}h^i{}_{j,00} = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^i{}_j\,,$$

であるから (8.27) 式は

$$\frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(i)} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^i{}_j\right)Z^{(j)}\,,$$

となる．ここで $i = 1,\, 2$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(1)} &= -\ddot{h}_+ Z^{(1)} - \ddot{h}_\times Z^{(2)}\,,\\ \frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(2)} &= -\ddot{h}_\times Z^{(1)} - \ddot{h}_+ Z^{(2)}\,,\quad \left(\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{8.28}$$

を得る．これは上で議論した結果と完全に一致する．

このように重力波の偏極（自由度）は二つであり，それらは進行方向に垂直な空間的固有距離の 4 重極的変化を誘起する．すなわち図 8.1(a), (b) からもわかるように，重力波による距離の変位は 180°回転に対して不変である．この性質は重力波を量子化したときに，それがスピン 2 のゼロ質量粒子として実現することを意味している．比較のため電磁波の場合を考えると，その偏極はやはり進行方向に垂直で二つあるがその変位は 2 重極的である．すなわち 360°回転で不変である．そして量子化されるとスピン 1 のゼロ質量粒子となる．

8.3　有効エネルギー運動量テンソル

前節の (b) 項での議論から明らかに重力波が物質内部を通過するとそこに 4 重極的振動を誘起する．これは物質が重力波からエネルギーを受け取っているこ

とを意味する．すなわち，重力波はエネルギー運動量を運ぶのである．ところが等価原理によって時空の各点で局所的に重力波のエネルギー運動量は定義できない．時空の各点では局所的に常にミンコフスキー時空と変わらないからである．しかし重力波の波長（あるいは振動の周期）に対して，それより十分に広い時空領域で見ると重力波は明らかに実在しており，どのような座標変換をしても消すことはできない．したがって重力波のエネルギー運動量テンソルは，その特徴的波長に比べて十分に広い時空領域において平均的な意味では定義されるであろう．この節ではそうした重力波の有効エネルギー運動量テンソルを構成しよう．

真空中を特徴的振幅が ϵ ($\ll 1$)，特徴的波長が λ である重力波が伝播している状況を考え，この重力波のもつエネルギー運動量によって $L \gg \lambda$ のスケールで時空に曲率が生じたとする．このとき時空の計量を

$$g_{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,; \quad \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = O(1), \qquad h_{\mu\nu} = O(\epsilon), \tag{8.29}$$

と分解する．図 8.2 に示したように $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ は曲率半径が $O(L)$ の計量，$h_{\mu\nu}$ はその上を伝播する重力波を表す．このとき上つきの計量 $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}{}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} + \cdots,$$

のように展開される．ここで $h_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げは $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ によって行う．

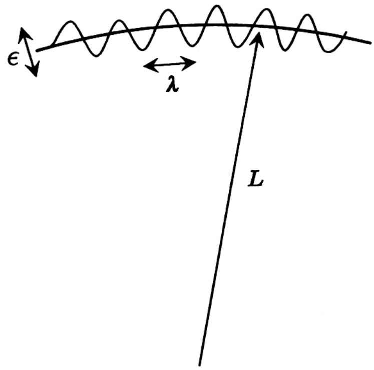


図 8.2

この状況下で計量の微分のオーダー評価を行っておくと

$$\overset{(0)}{g}_{\mu\nu,\alpha} = O\left(\frac{1}{L}\right), \qquad \overset{(0)}{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{L^2}\right),$$
$$h_{\mu\nu,\alpha} = O\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right), \qquad h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right),$$

である．これを考慮して，真空のアインシュタイン方程式を計量 $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ のまわりで展開すると

$$0 = G_{\mu\nu}(\overset{(0)}{g} + h) = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(\geq 3)}{G}_{\mu\nu}, \tag{8.30}$$

となる．ここで $\overset{(n)}{G}_{\mu\nu}$ の (n) は $h_{\mu\nu}$ に関する次数であり，$\overset{(\geq 3)}{G}_{\mu\nu}$ はその 3 次以上の高次の項すべてを意味する．(8.30) 式の右辺のそれぞれの項のオーダーを評価すると，$G_{\mu\nu}$ が計量の 2 階微分までで書かれていることから

$$\overset{(0)}{G}_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{L^2}\right), \quad \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} = O\left(\frac{\epsilon}{\lambda^2}\right), \quad \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} = O\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right), \quad \overset{(\geq 3)}{G}_{\mu\nu} = O\left(\frac{\epsilon^3}{\lambda^2}\right),$$

を得る．ところでこの各項の総和はゼロでなければならない．よってそれが成り立つためには

$$O\left(\frac{1}{L^2}\right) = O\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\right) \iff \lambda = O(\epsilon L), \tag{8.31}$$

でなければならない．

このときアインシュタイン方程式は

$$O\left(\frac{1}{\epsilon L^2}\right): \quad \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} = 0, \tag{8.32}$$
$$O\left(\frac{1}{L^2}\right): \quad \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \langle \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} \rangle = 0, \tag{8.33}$$
$$O\left(\frac{\epsilon}{L^2}\right): \quad \overset{(\geq 3)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} - \langle \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} \rangle = 0, \tag{8.34}$$

と分解される．ここで $\langle \cdots \rangle$ は $L \gg \ell \gg \lambda$ を満たす長さのスケール ℓ での平均を表す．(8.32) 式は計量 $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ 上での $h_{\mu\nu}$ に対する発展方程式，(8.33) 式は $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ に対する方程式，(8.34) 式は残りの高次の影響に関する式と解釈できる．特に

$O(1/L^2)$ の精度までで考えれば (8.32) と (8.33) 式から $h_{\mu\nu}$ と $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ が自己無撞着に決定される．そこで (8.33) 式は $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ に対するアインシュタイン方程式,

$$\overset{(0)}{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{GW}_{\mu\nu}\,; \quad T^{GW}_{\mu\nu} := -\frac{c^4}{8\pi G}\langle \overset{(2)}{G}_{\mu\nu}\rangle, \tag{8.35}$$

と見なすことができる．この $T^{GW}_{\mu\nu}$ が重力波の有効エネルギー運動量テンソルである．

さて $T^{GW}_{\mu\nu}$ を具体的に $h_{\mu\nu}$ で表そう．アインシュタインテンソルが

$$G_{\mu\nu} = \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right) R_{\alpha\beta}\,,$$

と書けることに注意すると $\overset{(1)}{G}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{G}_{\mu\nu} &= \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\overset{(1)}{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} - \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}\right)\overset{(0)}{R}_{\alpha\beta} \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\overset{(1)}{R}_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\epsilon}{L^2}\right),\end{aligned}$$

と評価される．これより $O(1/L^2)$ の精度で

$$\left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\overset{(1)}{R}_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.36}$$

が成り立つ．これは重力波の伝播方程式にほかならない．次に $\overset{(2)}{G}_{\mu\nu}$ を考える．(8.36) 式に注意すると

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{G}_{\mu\nu} &= \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} - \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}\right)\overset{(1)}{R}_{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta} - \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} h^{\alpha\sigma}h_\sigma{}^\beta\right)\overset{(0)}{R}_{\alpha\beta} \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\epsilon^2}{L^2}\right),\end{aligned}$$

を得る．よって $O(1/L^2)$ の精度で

$$\langle\overset{(2)}{G}_{\mu\nu}\rangle = \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}\right)\langle\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta}\rangle, \tag{8.37}$$

である．

さて $\langle\cdots\rangle$ の平均は $\ell \ll L$ のスケール ℓ で行うから，そのスケールでは $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ の曲率は無視してよい．よっていま着目する時空点のまわりでスケール ℓ の領域で成り立つ局所ローレンツ座標を取ることができる．

$$\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{\ell^2}{L^2}\right).$$

これより，$\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta}$ の計算では $O(\ell/L)$ の補正を無視して

$$\overset{(0)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0,$$

としてよい．このとき $\overset{(2)}{R}_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} &= \overset{(2)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \overset{(2)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\,\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\mu\nu} - \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\nu}\,\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\mu\alpha}\,,\\
\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}{}_{\mu,\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}\right),\\
\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}h^{\alpha\sigma}\left(h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\sigma\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}\right),
\end{aligned}$$

と評価される．これを ℓ のスケールにわたって平均するとき，$h_{\mu\nu}$ が $\lambda\ (\ll \ell)$ の波長で振動していることに注意すると，$O(\lambda/\ell)$ を無視して

$$\langle (h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma,\beta})_{,\alpha}\rangle = 0, \tag{8.38}$$

と考えてよい．したがって

$$\langle \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\rangle = \langle \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\,\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\mu\nu} - \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\nu}\,\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\mu\alpha}\rangle\,,$$

を得る．

ここで TT ゲージに移ると $h^{\mu\nu}_{TT,\nu} = 0$，$h_{TT} = 0$ より $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha} = 0$ である．よって

$$\langle \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\rangle_{TT} = -\langle \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\nu}\,\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\mu\alpha}\rangle_{TT}\,.$$

これに対して (8.38) 式から

$$\langle h_{\mu\nu,\alpha}h_{\rho\sigma,\beta}\rangle = -\langle h_{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\rho\sigma}\rangle = -\langle h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma,\beta\alpha}\rangle,$$

が成り立つことを使うと

$$\langle \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\rangle_{TT} = -\frac{1}{4}\langle h^{\alpha}{}_{\beta,\nu} h^{\beta}{}_{\alpha,\mu}\rangle_{TT} = -\frac{1}{4}\langle h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta,\nu}\rangle_{TT}\,,$$

を得る．さらに

$$\eta^{\mu\nu}\langle \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\rangle_{TT} = -\frac{1}{4}\langle h^{\alpha}{}_{\beta,\nu} h^{\beta}{}_{\alpha,\mu}\rangle_{TT} = \frac{1}{4}\langle h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta}\rangle_{TT} = 0\,,$$

である．

これらの結果を (8.37) 式に代入すると

$$\langle \overset{(2)}{G}_{\mu\nu}\rangle_{TT} = \langle \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\rangle_{TT} = -\frac{1}{4}\langle h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta,\nu}\rangle_{TT}\,, \tag{8.39}$$

を得る．これと (8.35) 式より重力波の有効エネルギー運動量テンソルは

$$T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G}\langle h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta,\nu}\rangle_{TT}\,,$$

で与えられる．これを $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ として $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ に関する一般座標の表現に戻せば最終的な $T^{GW}_{\mu\nu}$ の表式として

$$T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G}\langle h^{\alpha\beta}{}_{;\mu} h_{\alpha\beta;\nu}\rangle_{TT}\,, \tag{8.40}$$

が得られる．この表式を重力波の有効エネルギー運動量テンソルに対するアイザックソン (Issacson) の公式という．

8.4 重力波の発生と 4 重極公式

さてローレンツゲージでの線形化されたアインシュタイン方程式 (8.16) に戻って重力波の発生を考えよう．この式を遅延グリーン関数を使って積分すると

$$\psi_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{T_{\mu\nu}\big(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c,\ \vec{y}\big)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y\,, \tag{8.41}$$

となる．ここで物質の $T_{\mu\nu}$ の広がりのスケールを R とし，場の点 $\vec{x}$ を $r := |\vec{x}| \gg R$ とすると

$$|\vec{x} - \vec{y}| = r - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{r} + \cdots\,,$$

と展開できる．これを使って $T_{\mu\nu}(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c,\ \vec{y})$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
&T_{\mu\nu}\big(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c,\ \vec{y}\big)\\
&\quad = T_{\mu\nu}\big(t - r/c,\ \vec{y}\big) + \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c\,r}\frac{\partial}{\partial t}T_{\mu\nu}\big(t - r/c,\ \vec{y}\big) + \cdots,
\end{aligned}
$$

を得る．ここで物質の運動が光速に比べてゆっくりとしている，すなわち $T_{\mu\nu}$ の変化の時間スケールが光がその系を横切る時間スケール $(=c/R)$ に比べて十分長いと仮定すると

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c\,r}\frac{\partial}{\partial t}T_{\mu\nu}\big(t-r/c,\ \vec{y}\big)\right| &\le \frac{R}{c}\left|\frac{\partial}{\partial t}T_{\mu\nu}\big(t-r/c,\ \vec{y}\big)\right|\\
&\ll \left|T_{\mu\nu}\big(t-r/c,\ \vec{y}\big)\right|,
\end{aligned}
$$

である．この近似をスローモーション近似 (slow-motion approximation) といい，重力の弱いニュートン的描像がよい天体で成り立つ近似である．いまの場合，時空はほぼミンコフスキー時空的であると仮定しており，スローモーション近似は常に成り立っていると考えてよい．この近似の下で (8.41) 式は

$$
\psi_{\mu\nu}(t,\ \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r}\int T_{\mu\nu}\big(t-r/c,\ \vec{y}\big)d^3y\,, \tag{8.42}
$$

となる．この右辺の積分を評価しよう．

(a) 物質のニュートン的重力場

まず $\nu=0$ 成分を考えると，いまの近似の下での $T_{\mu\nu}$ の保存則，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ より

$$
\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T^{\mu 0}d^3y = \int T^{\mu 0}{}_{,0}d^3y = -\int T^{\mu i}{}_{,i}d^3y = -\int T^{\mu i}dS_i = 0\,,
$$

を得る．ここで dS_i は，r が十分大きい球面の面積要素であり，物質源が $r \lesssim R$ のみに存在することを使った．したがって

$$
P^\mu := \frac{1}{c}\int T^{\mu 0}d^3y\,, \tag{8.43}
$$

は時間的に保存する．この P^μ は全系の 4 元運動量である．よって適当なローレンツ変換を行うと $P^i=0$，すなわち運動量中心系 (center of momentum frame)

に移ることができる．このとき $P^0 = Mc$ とおくと M は全系の重力質量（いまの近似では静止質量と一致）である．ゆえに $T^{00} \approx T_{00}$，$T^{i0} \approx -T_{i0}$ を考慮して

$$\psi_{00}(t, \overrightarrow{x}) = \frac{4G}{c^4 r}\int T_{00} d^3y = \frac{4GM}{c^2 r}, \qquad \psi_{0i}(t, \overrightarrow{x}) = 0,$$

を得る．(8.11) 式よりこれは

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{1}{2}(\psi_{00} + \psi^i{}_i) = \frac{2G}{c^4 r}\int (T_{00} + T^i{}_i) d^3y \\ &\approx \frac{2G}{c^4 r}\int T_{00} d^3y = \frac{2GM}{c^2 r}, \\ h_{0i} &= \psi_{0i} = 0, \end{aligned} \tag{8.44}$$

を意味する．ここでニュートン的な物質源に関して $T^i{}_i = 3p \ll T_{00} = \rho c^2$ が成り立つことを使った．この式は 5.3 節で考察したニュートン近似の下での計量の摂動成分にほかならない．

(b) 重力波の 4 重極公式 (quadrupole formula)

重力波を表す計量の揺らぎは ψ_{ij} 成分が担っている．いま (8.42) 式のその成分に関する積分を評価するために，再びエネルギー運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ より

$$\left(T^{\alpha\beta} x^\mu x^\nu\right)_{,\alpha\beta} = \left(T^{\mu\beta} x^\nu + T^{\nu\beta} x^\mu\right)_{,\beta} = 2T^{\mu\nu},$$

が成り立つことに注意する．この $\mu = i$，$\nu = j$ 成分を使うと

$$\begin{aligned} &\int T^{ij} d^3y \\ &= \frac{1}{2}\left(\int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3y + 2\int (T^{k0} y^i y^j)_{,k0} d^3y + \int (T^{k\ell} y^i y^j)_{,k\ell} d^3y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3y + 2\int (T^{k0} y^i y^j)_{,0} dS_k + \int (T^{k\ell} y^i y^j)_{,\ell} dS_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\int (T^{00} y^i y^j)_{,00} d^3y = \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00} y^i y^j d^3y \\ &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho\, y^i y^j d^3y, \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の行の積分は物質源の慣性モーメント（あるいは 4 重極モーメント），

$$I_{ij} := \int \rho y^i y^j d^3y,$$

に等しい．この結果を (8.42) 式に代入し，

$$\psi_{ij}(t, \overrightarrow{x}) = \frac{2G}{c^4 r}\ddot{I}_{ij}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right) \tag{8.45}$$

を得る．これからわかるように，重力波はニュートン的時空の揺らぎ (h_{00}) に対して $1/c^2$ の因子だけ小さいオーダーであり，ニュートンポテンシャル $\phi_N = -h_{00}c^2/2$ と比べると $1/c^4$ のオーダーである．

重力波の真の自由度を取り出すためには TT ゲージに移る必要がある．そこで (8.23) 式で与えた TT 射影演算子がいまの場合どうなるかを考えると，$r \gg R$ であるから重力波の波数ベクトル $\overrightarrow{k}$ はすべて原点 $r = 0$ を中心とする動径方向を向いている．よって TT ゲージでの計量の揺らぎは

$$h_{ij}^{TT} = \psi_{ij}^{TT} = \left(P_i{}^k P_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)\psi_{k\ell}\,;$$
$$P^{ij} = \delta^{ij} - n^i n^j, \qquad n^i := \frac{x^i}{r}, \tag{8.46}$$

で与えられる．ここで

$$\rlap{-}I^{ij} := I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}I^k{}_k,$$

によってトレースがゼロの還元 4 重極モーメント (reduced quadrupole moment) を定義すると，

$$\left(P_i{}^k P_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)I_{k\ell} = \left(P_i{}^k P_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)\rlap{-}I_{k\ell},$$

が成り立つ．よって (8.45) 式の TT 成分を取ると

$$h_{ij}^{TT}(t, \overrightarrow{x}) = \frac{2G}{c^4 r}\left(P_i{}^k P_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)\ddot{\rlap{-}I}_{k\ell}\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{8.47}$$

を得る．これが物質源から十分に離れた場の点で観測される重力波を表す．この表式を重力波の 4 重極公式という．これからわかるように重力波は I_{ij} のトレース部分に依存しない．

(c) 重力波のエネルギー放出率

物質源からの重力波輻射による全エネルギー放出率は，有効エネルギー運動量の表式 (8.40) を使って

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} = c\int_{r\to\infty}(-T_{0k}^{GW})dS^k = c\int_{r\to\infty} d\Omega\, r^2(-T_{0k}^{GW}\, n^k)$$
$$= \frac{c^5}{32\pi G}\int_{r\to\infty} d\Omega\, r^2\langle -h^{ij}{}_{,0}h_{ij,k}\, n^k\rangle_{TT}\,,$$

と表される．ここで h_{ij} が $r\to\infty$ で，(TT 射影演算子による角度依存性を除いて) $h_{ij} = f_{ij}(ct-r)/r$ なる関数形をもつことに注意すると

$$h_{ij,k}\, n^k = -h_{ij,0} - \frac{1}{r}h_{ij}\,,$$

である．よって上式は

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} = \frac{c^5}{32\pi G}\int_{r\to\infty} d\Omega\, r^2\langle h^{ij}{}_{,0}h_{ij,0}\rangle_{TT}$$
$$= \frac{c^3}{32\pi G}\int_{r\to\infty} d\Omega\, r^2\langle \dot{h}^{ij}\,\dot{h}_{ij}\rangle_{TT}\,, \tag{8.48}$$

となる．この表式は，重力波源から十分離れた場所ではそれが強い重力場をもつ源であっても正しい式である．

ここでスローモーション近似が成り立つ重力波源を考えると，(8.47) 式より

$$\langle \dot{h}^{ij}\,\dot{h}_{ij}\rangle_{TT}$$
$$= \frac{4G^2}{c^8r^2}\left(P_i{}^kP_j{}^\ell - \frac{1}{2}P_{ij}P^{k\ell}\right)\left(P_m{}^iP_n{}^j - \frac{1}{2}P_{mn}P^{ij}\right)\dddot{I\!\!\!-}_{k\ell}\,\dddot{I\!\!\!-}^{mn}$$
$$= \frac{4G^2}{c^8r^2}\left[\delta^{km}\delta^{\ell n} - n^kn^m\delta^{\ell n} - n^\ell n^n\delta^{km} + \frac{1}{2}n^kn^\ell n^mn^n\right]\langle\dddot{I\!\!\!-}_{k\ell}\,\dddot{I\!\!\!-}_{mn}\rangle\,,$$

である．これを (8.48) に代入して，角度積分に関する公式，

$$\int d\Omega\, n^in^j = \frac{4\pi}{3}\delta^{ij}\,,$$
$$\int d\Omega\, n^in^jn^kn^\ell = \frac{4\pi}{15}\left(\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk}\right),$$

を使うと

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} = \frac{G}{5c^5}\langle\dddot{I\!\!\!-}_{ij}\,\dddot{I\!\!\!-}^{ij}\rangle, \tag{8.49}$$

を得る．ここで $I\!\!\!-_{ij}$ は遅延時刻 $t-r/c$ の関数である．このように重力波によるエネルギー放出は，慣性モーメントの時間に関する 3 階微分が存在して初めて発生する．この表式も（重力波輻射率に関する）4 重極公式と呼ばれる．

この表式を使って実際にどの程度の重力波が発生しうるかオーダー評価を行っておこう．物質源のもつ特徴的な運動の速さを v $(\ll c)$ とすると

$$\dddot{I\!\!\!-}_{ij} \lesssim MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^3 \sim \left(\frac{c^5}{G}\right)\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^3,$$

である．ここで不等号 $\lesssim$ が付く理由は物質源の 4 重極モーメントが変化しなければならないためである（例えば星が球対称に振動しても重力波は発生しない）．さらに物質源がほぼ力学的平衡状態にあるとすると，ビリアル定理により $GM/R \sim v^2$ が成り立つから

$$\dddot{I\!\!\!-}_{ij} \lesssim \left(\frac{c^5}{G}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^5,$$

となる．これより

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} \lesssim \left(\frac{c^5}{G}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^{10}, \qquad (8.50)$$

を得る．ここで c^5/G はエネルギー放出率の単位をもち，その具体的値は

$$L_G := \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59}\,\mathrm{erg/s}, \qquad (8.51)$$

である．

例えば，太陽の重力ポテンシャルに対応する程度の速度をもつ重力波源では，$v/c \sim 10^{-3}$ であるから $(dE/dt)_{GW} \lesssim 10^{29}\,\mathrm{erg/s}$ となって，最大効率で重力波が発生する場合を考えても太陽の輻射光度 $(4 \times 10^{33}\,\mathrm{erg/s})$ に比べ非常に小さい．一方 (8.50) 式は $v/c \ll 1$ を仮定して評価したが，その結果は速度 v が相対論的になってもほぼ正しい評価を与える．例えば，超新星爆発などの星の重力崩壊や中性子星の合体に伴う重力波放出では，系の質量は太陽質量の数倍程度であり，$(v/c)^2 \sim 0.1$ の時期が数ミリ秒から数十ミリ秒継続すると考えられる．よって最大で $E_{GW} \sim 10^{52}$–$10^{53}\,\mathrm{erg}$ のエネルギーが重力波として放出可能である．これは静止質量 $(\gtrsim M_\odot c^2 = 2 \times 10^{54}\,\mathrm{erg})$ の 1% から 1 割近いエネルギーである．このように相対論的な天体現象においては，しばしば重力波輻射が最も主要なエネルギー放出機構となる．

最後に (8.51) 式で与えられるエネルギー放出率 L_G は重力波源が相対論的であるか否かにかかわらず，またどのような大きさや質量をもつかにも無関係な輻射率の絶対的限界であることに注意しよう．実はそれだけでなく，L_G はエネルギー放出が重力波輻射によるかどうかにも依存しない普遍的な最大輻射光度になっている．これは次のようにしてわかる．いま光でも未知の粒子でも何でもよいから，それからなる広がりのスケールが R である輻射体を考える．そのエネルギー密度を ε とするとこの輻射体のもつ全エネルギーに等価な質量は

$$M_{rad} = \frac{\varepsilon R^3}{c^2},$$

である．なお，ここでの評価では数係数は無視する．よってこの輻射体がブラックホールにならずに存在するためには

$$1 > \frac{GM_{rad}}{Rc^2} = \frac{G\varepsilon R^2}{c^4}, \tag{8.52}$$

でなければならない．一方輻射体からの輻射光度を L とすると，それは

$$L \leq \varepsilon R^2 c, \tag{8.53}$$

によって上から押さえられる．したがって (8.52), (8.53) 式より

$$\frac{L}{L_G} = \frac{GL}{c^5} \leq \frac{G\varepsilon R}{c^4} < 1,$$

を得る．すなわち任意の輻射体に対して $L < L_G$ であり，L_G は普遍的な最大輻射光度である．

問　　題

8.1 (8.23) 式が成り立つことを確かめよ．

8.2 座標変換 $x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$，$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$，$x^3 = r\cos\theta$ によって，(8.45) 式の ψ_{ij} を球座標での成分 ψ_{ab} $(a, b = r, \theta, \varphi)$ で表わすことができる．このとき，h_{ab}^{TT} を ψ_{ab} で具体的に表し，さらに重力波源の還元 4 重極モーメントのデカルト座標成分 $I\!\!\!-_{ij}$ と関係づけよ．

8.3 質量 m_1 と m_2 の星が距離 R 離れて円軌道上をケプラー運動している系 $(R \gg G(m_1 + m_2)/c^2)$ を考える．

(a)　この系から十分離れた場所で観測される重力波の振幅を球座標を用いて求めよ．

(b)　重力波による全エネルギー放出率 $(dE/dt)_{GW}$ を求めよ．$m_1 = m_2 = 1.5M_\odot$, $R = 10^5$ km のときの $(dE/dt)_{GW}$ はいくらか．また $R = 10^2$ km ではいくらか．

(c)　重力波放出による系のエネルギー変化を考慮すると軌道はどのように変化すると思うか，考察せよ．

9 相対論的宇宙モデル

一般相対論は，第6章で考察したような孤立した天体の重力場を記述するだけでなく，宇宙全体の大局的な時空構造をも記述する．そして観測される宇宙の時空構造がアインシュタイン方程式の宇宙解によって正しく表現されていることがわかり，我々のもつ宇宙観を大きく変えたのである．この章では一般相対論が予言する宇宙の時空構造に関して考察する．

9.1 宇宙の計量

宇宙の時空構造を考えるうえで大きな問題は，星のようにその様々な進化の過程における多数の観測例が存在するわけでなく，宇宙は一つしかない，という事実である．そして観測的にも宇宙の別の時期や場所に行ってそこの時空構造を直接調べるわけにもいかない．そのため適当な作業仮説をおいてその論理的帰結と現実の宇宙の観測データを比較検討し，それが整合的であるかどうかを検証し必要なら変更しながら推論を進めることが重要になる．そしてその作業仮説の最も基本的なものが，我々（より大局的には我々の銀河系）は宇宙において特別な場所にはいない，という宇宙原理 (cosmological principle) である．宇宙原理はそれまで天動説に支配されていた社会に対し最初に地動説を唱え，宇宙の中で地球を相対化したコペルニクスに敬意を表してコペルニクスの原理 (Copernican principle) とも呼ばれる．

宇宙原理に基づけば，宇宙のどの場所においても観測される銀河の分布は我々が観測するものとそれほど変わらないであろう．これは宇宙には物質がほぼ一様に存在することを意味する．また宇宙に特別な方向性が存在することもないであろう．すなわち時空の構造はほぼ等方的であろう．いい換えると宇宙は大

きなスケールで見れば，空間的に一様な物質密度と一様等方な幾何学的構造をもった時空と考えるのが妥当である．

空間が一様等方であるからといってその時空構造が平坦な時空と変わらないわけではない．ここで5.3節の終わりにおいて行ったアインシュタイン方程式の次元解析をもう一度繰り返そう．物質の質量密度を ρ, 広がりのスケールを R, それによって引き起こされる時空の曲率半径の大きさを L とすると

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ \Rightarrow \ \frac{R^2}{L^2} \sim \frac{GM(R)}{Rc^2} \sim \frac{G\rho R^2}{c^2} ,$$

である．したがって ρ がどれほど小さくても十分に大きな空間的広がりを考えると強い重力場が出現する．これは宇宙が全体としてみれば非常に強い重力場，平坦な時空とは大きく異なる時空構造をもつことを意味する．

上の考察を基にして宇宙の時空計量の形を考えよう．宇宙原理から，そこから見ると等方的に見える観測者の系が宇宙のいたる所に存在する．よってこの観測者の固有時間を時間座標 t に取れば t =一定の空間的超曲面は一様等方である．すなわち宇宙の時空構造は，一様等方な 3 次元空間とそれに直交する時間的方向の直積によって表されるであろう．ところで 3 次元の一様等方空間の簡単な例は平坦なユークリッド空間 (E^3) であり，もう一つは 2.4 節で与えた 3 次元球面 (S^3) である．(2.49) 式で示したように，半径 a の 3 次元球面のリーマンテンソルは

$$\overset{(3)}{R}_{ijk\ell} = \frac{1}{a^2}\left(\overset{(3)}{g}_{ik}\,\overset{(3)}{g}_{j\ell} - \overset{(3)}{g}_{i\ell}\,\overset{(3)}{g}_{jk}\right), \tag{9.1}$$

で与えられる．また 3 次元ユークリッド空間はこの式で $a \to \infty$ の極限として表される．この二つ以外のもう一つの一様等方空間は 3 次元双曲面 (H^3) である．3 次元双曲面は (9.1) 式で $a^2 \to -a^2$ とした空間である．

3 次元ユークリッド空間と 3 次元球面は 4 次元ユークリッド空間の中に埋め込むことができる．いま 4 次元のユークリッド空間の計量を

$$ds_E^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 + (dz^4)^2 ,$$

とすると E^3 は z^4 =一定，S^3 は $(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = a^2$ で表される．いま

$$z^1 = r \sin\theta \, \cos\varphi ,$$

$$z^2 = r\sin\theta\,\sin\varphi\,,$$
$$z^3 = r\cos\theta\,, \tag{9.2}$$

とすると

$$ds^2_{E^3} = dr^2 + r^2 d\Omega^2\,, \quad (0 \le r < \infty)$$
$$ds^2_{S^3} = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)} + r^2 d\Omega^2\,, \quad (0 \le r \le a)$$

を得る．ここで以前同様 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ である．一方 3 次元双曲面は 4 次元ユークリッド空間に埋め込むことはできない．しかし 4 次元ミンコフスキー時空に埋め込むことは可能である．すなわち 4 次元ミンコフスキー時空の計量を

$$ds^2_M = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 - (dz^4)^2\,,$$

とおくと H^3 は $(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 - (z^4)^2 = -a^2$ である．ここで (z^1, z^2, z^3) を (9.2) 式と同様におくと

$$ds^3_{H^3} = \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)} + r^2 d\Omega^2\,, \quad (0 \le r < \infty)$$

を得る．これら三つの場合を統一的に表すために，$r \to ar$ と r 座標をスケール変換すると

$$ds^2_{(3)} = a^2 d\sigma^2_K\,; \quad d\sigma^2_K = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2; \quad \begin{cases} K = +1 & ;\, S^3, \\ K = 0 & ;\, E^3, \\ K = -1 & ;\, H^3, \end{cases} \tag{9.3}$$

と表される．またここで導入した K を使えば，3 次元空間のリーマンテンソルも

$$\overset{(3)}{R}_{ijk\ell} = \frac{K}{a^2}\left(\overset{(3)}{g}_{ik}\,\overset{(3)}{g}_{j\ell} - \overset{(3)}{g}_{i\ell}\,\overset{(3)}{g}_{jk}\right), \tag{9.4}$$

と統一的に表される．一般に一様等方空間はリーマンテンソルの共変微分がゼロであり定曲率空間と呼ばれる．定曲率空間のリーマンテンソルは 3 次元以外の一般次元でも上式と同形である．よって定曲率空間の可能性は曲率が正の球

面 ($K=+1$)，ゼロの平面 ($K=0$)，負の双曲面 ($K=-1$) の三つですべて尽くされている．また定曲率空間は最大対称空間であり，n 次元では独立なキリングベクトルが $n(n+1)/2$ 個存在する．

(9.3) 式で与えた $d\sigma_K^2$ はまた

$$r=\begin{cases}\sin\chi & ;K=+1,\\ \chi & ;K=0,\\ \sinh\chi & ;K=-1,\end{cases}$$

とおくと

$$d\sigma_K^2=d\chi^2+(\Sigma_K(\chi))^2\,d\Omega^2;\quad \Sigma_K(\chi)=\begin{cases}\sin\chi & (0\le\chi\le\pi) & K=+1,\\ \chi & (0\le\chi<\infty) & K=0,\\ \sinh\chi & (0\le\chi<\infty) & K=-1,\end{cases} \tag{9.5}$$

とも表される．ここで $\Sigma_K(\chi)$ を K の符号によらず統一的に

$$\Sigma_K(\chi)=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}\chi), \tag{9.6}$$

と表すことも可能である．ここで $\sqrt{-K}$ は $K=+1$ のときは i を与え，$K=0$ のときは $K\to-0$ で定義されるものとする．この座標は明らかに 3 次元球座標 ($K=+1$) とその $K=0,\,-1$ への拡張になっている．またこれらの空間の空間的体積は $K=+1$ (S^3) の場合は有限であり ($V=2\pi^2a^3$)，$K=0$ (E^3) と $K=-1$ (H^3) の場合は無限大である[1]．$K=+1$ を（空間的に）閉じた宇宙，$K=-1$ を開いた宇宙，$K=0$ を平坦な宇宙という．図 9.1(a)～(c) はこれら三つの 3 次元空間の埋め込みの概念図である．

宇宙原理よりこれら三つのいずれかの空間が時間座標 t =一定面になり，その空間的超曲面に直交する世界線が宇宙を等方に見る観測者の世界線と一致するはずである．よって時空の計量は

---

[1] $K=0,\,-1$ の場合には，適当な 2 次元面を同一視することによって空間体積を有限にすることができる．最も簡単な例は，$K=0$ の場合においてそのデカルト座標を $\{x^i\}$ とするとき，c^i を定数ベクトルとして $x^i=nc^i$ ($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$) の面を同一視することである（トーラス的コンパクト化）．しかしこうしたコンパクト化は空間の大局的な等方性を壊す．ここでは暗黙の了解として一様等方性が大局的に成り立っていると仮定する．

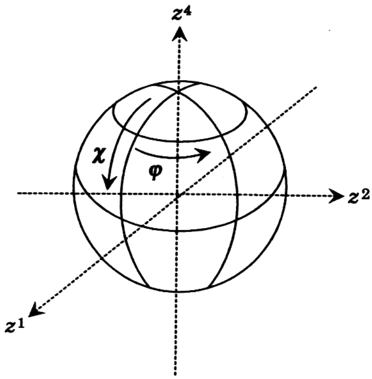


図 9.1(a)

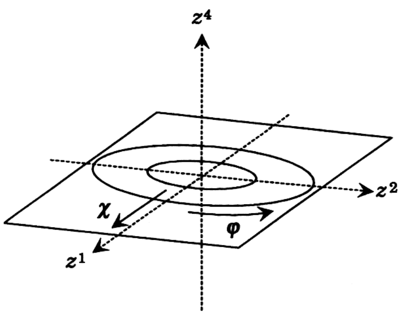


図 9.1(b)

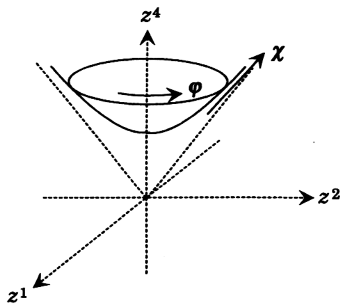


図 9.1(c)

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2d\sigma_K^2\,, \tag{9.7}$$

で表される．ここで a は空間的には定数であるが一般には時間の関数 $a = a(t)$ である．この計量で表される時空を空間的一様等方宇宙 (spatially homogeneous and isotropic universe)，または単に一様等方宇宙といい，その計量をフリードマン・ロバートソン・ウォーカー計量 (Friedmann-Robertson-Walker metric) という．また a は明らかに 3 次元空間の大きさを表しており，宇宙のスケール因子 (scale factor) と呼ばれる．

9.2 フリードマン方程式

(9.7) 式から明らかに，一様等方宇宙の時空構造でまだ決まっていない要素は宇宙のスケール因子 a だけである．そこで (9.7) 式の計量をアインシュタイン方程式に代入して a を決める方程式を求めよう．

3 次元空間の線素 $d\sigma_K^2$ を

$$d\sigma_K^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \,,$$

とおく．ここで空間座標 x^i は特に指定しないが，例えば (9.3) 式か (9.5) 式で与えられると考えてよい．また時間座標は $x^0 = ct$ とおく．よって時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{00} = -1 \,, \qquad g_{ij} = a^2 \gamma_{ij} \,,$$

で与えられる．また宇宙が等方に見える観測者の 4 元速度を u^μ とすると

$$u^\mu = c n^\mu \,; \quad n^\mu = (1, 0, 0, 0) \,,$$

である．すなわち観測者の世界線と空間座標 x^i =一定の世界線は一致している．このような空間座標を共動座標 (comoving coordinates) という．またこの観測者の系を宇宙の静止系 (cosmic rest frame) と呼び，時間 t を宇宙（固有）時間 (cosmic (proper) time) という．

このとき時空の接続 $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0{}_{00} = \Gamma^0{}_{0i} = \Gamma^i{}_{00} = 0 \,, \\
&\Gamma^0{}_{ij} = \frac{1}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) g_{ij} = \frac{1}{c} a\dot{a}\gamma_{ij} \,, \qquad \Gamma^i{}_{j0} = \frac{1}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\delta^i_j \,, \\
&\Gamma^i{}_{jk} = {}^\gamma\Gamma^i{}_{jk} \,,
\end{aligned}$$

となる．ここで ${}^\gamma\Gamma^i{}_{jk}$ は計量 γ_{ij} に関する接続である．これらからリッチテンソルを計算すると

$$R_{00} = -3\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \,, \qquad R_{0i} = 0 \,,$$

$$R_{ij} = {}^{\gamma}R_{ij} + \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] g_{ij}\,,$$

を得る．ここで ${}^{\gamma}R_{ij}$ は γ_{ij} のリッチテンソルであり，(9.4) 式より

$${}^{\gamma}R_{ij} = 2K\gamma_{ij} = \frac{2K}{a^2}g_{ij}\,,$$

である．よってアインシュタインテンソルは

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right],\\
G_{0i} &= 0\,,\\
G_{ij} &= -\frac{1}{c^2}\left[2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right] g_{ij}\,,
\end{aligned} \tag{9.8}$$

で与えられる．またこの時空のワイルテンソル $C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ はゼロである．2.4 節で指摘したように $C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0$ の時空は共形的平坦である．よって適当な共形変換,

$$g_{\mu\nu}(x) \;\to\; \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \phi^2(x) g_{\mu\nu}(x)\,,$$

で計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量になる（もちろん $\bar{g}_{\mu\nu}$ はデカルト的直交座標に対する計量 $\eta_{\mu\nu}$ になるとは限らない）.

一方物質のエネルギー運動量テンソルは $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ として一般に

$$T^{\mu\nu} = \rho\, c^2 n^\mu n^\nu + p h^{\mu\nu} + q^\mu n^\nu + n^\mu q^\nu + \pi^{\mu\nu},$$

と分解できる．ここで

$$\begin{aligned}
\rho\, c^2 &:= T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu\,,\\
q^\mu &:= -h^\mu{}_\nu T^{\nu\alpha} n_\alpha\,,\\
p &:= \frac{1}{3} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\,,\\
\pi^{\mu\nu} &:= \left(h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta - \frac{1}{3} h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta}\right) T^{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

である．また $h_{\mu\nu}$ は t =一定面への射影テンソルであり，共動座標の下では $h_{\mu 0}=0$, $h_{ij}=g_{ij}=a^2\gamma_{ij}$ である．ρc^2, $q^\mu c$, p, $\pi^{\mu\nu}$ はそれぞれ，n^μ の静止系

から見たエネルギー密度，エネルギー流束，等方ストレス（圧力），非等方ストレスを表す．これらの量で $T_{\mu\nu}$ の成分を書き下すと

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= \rho c^2 \,, \\
T_{0i} &= -q_i \,, \\
T_{ij} &= p g_{ij} + \pi_{ij} \,,
\end{aligned} \tag{9.9}
$$

である．(9.8) 式と (9.9) 式に対して（宇宙定数項を含めた）アインシュタイン方程式，

$$
G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \,,
$$

を考えると $q_i = 0$，$\pi_{ij} = 0$ でなければならないことがわかる．すなわち一様等方宇宙では物質のエネルギー運動量テンソルは必ず完全流体形でなければならない．しかし一般には ρ と p が流体の質量密度と圧力を表すとは限らないことを注意しておく．

残りの非自明なアインシュタイン方程式は，$(0,0)$ 成分と (i,j) 成分のトレース部分である．それらはそれぞれ

$$
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \,, \tag{9.10}
$$

$$
\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right) = -\frac{4\pi G p}{c^2} + \frac{\Lambda c^2}{2} \,, \tag{9.11}
$$

を与える．(9.10) 式は，物質密度がわかれば宇宙のスケール因子の時間発展が解ける式になっており，これをフリードマン方程式 (Friedmann equation) という．(9.11) 式は (9.10) 式を使って書き直すと

$$
\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \,, \tag{9.12}
$$

となる．これがスケール因子に対する本来の運動方程式であるが，すぐに見るように物質のエネルギー運動量保存則を考慮すると運動の積分が求まり，その結果はフリードマン方程式に一致する．

エネルギー運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ の空間成分（$\mu = i$）は宇宙の一様等方性により自明に満たされる．よって非自明な方程式は時間成分（$\mu = 0$）だけと

なり，エネルギー保存則，

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)=0\,, \tag{9.13}$$

を与える．物質が完全流体であり圧力が密度の関数 $p=p(\rho)$ として与えられている場合，この式を解き ρ を a の関数として表すことができる．またこの式を考慮すると，確かに (9.12) 式の運動の積分がフリードマン方程式 (9.10) になっており，K が積分定数に対応していることがわかる．すなわち (9.10) 式と (9.13) 式を解けば，その結果は $\dot{a}\neq 0$ である限り (9.12) 式を自動的に満たす．これはもちろん縮約されたビアンキ恒等式の帰結である．

(9.12) 式からわかるように，$\Lambda=0$ であれば $p\geq 0$ である通常の物質に対しては必ず $\ddot{a}<0$ である．すなわち，(1) 宇宙時空の 3 次元空間は一般に膨張あるいは収縮する動的な空間であり，(2) 膨張 ($\dot{a}>0$) していればその膨張速度は減速し，収縮 ($\dot{a}<0$) していれば収縮が加速される．特に (2) の性質は重力が引力でありその力が常に物質を集める方向に働くことの表れである．一方宇宙定数項が存在していれば $\ddot{a}=0$ とすることが可能となる．アインシュタインが宇宙定数を導入した理由もそこにあった．アインシュタインでさえ当時の静的な宇宙像に囚われて，動的な膨張（収縮）宇宙をすぐには受け入れられなかったのである．しかしその後，我々の宇宙は膨張していることが観測的に明らかになり，アインシュタインをして宇宙定数項の導入を「人生最大の失敗」と言わしめたという逸話が残っている．

9.3　一様等方宇宙モデル

この節では，いくつかの簡単な場合についてフリードマン方程式の解を求める．

(a) $\Lambda=K=0$, $p=w\,\rho\,c^2$ ($w=$ **定数**)

これは空間的に平坦な宇宙であり最も簡単な場合である．(9.13) 式は

$$\dot{\rho}+3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho=0,$$

となり，簡単に解けて

$$\rho\propto\frac{1}{a^{3(1+w)}}\,,$$

を得る．これをフリードマン方程式 (9.10) に代入して解くと，膨張解として

$$a(t)=\begin{cases} a_0\left(\dfrac{t}{t_0}\right)^n, \ n=\dfrac{2}{3(1+w)}; & w\neq -1, \\ a_0\exp(H_0t),\ H_0=\sqrt{\dfrac{8\pi G\rho}{3}}; & w=-1, \end{cases} \tag{9.14}$$

を得る．ここで $t>0$ とした．収縮解はこの解の時間反転 $t\to -t$ $(t<0)$ で与えられる．いずれにしても，この宇宙解の固有時間 t が過去か未来かいずれかの方向に有限であることに注意しておく．

一般に $w>-1/3$ なら $n<1$ であり，宇宙は減速膨張（または加速収縮）する．前節最後に指摘したように，物質が通常の流体であればその音速は $c_s^2=dp/d\rho=w\,c^2$ で与えられるから $w\geq 0$ が期待される．よって，通常の物質を考える限り宇宙は常に減速膨張（加速収縮）である．特に $w=0$ なら $a\propto t^{2/3}$ である．この宇宙では圧力がないのでダスト優勢宇宙 (dust-dominated universe) と呼ばれる．空間的平坦なダスト優勢宇宙をアインシュタイン-ド・ジッター（Einstein-de Sitter）宇宙モデルという．非相対論的流体は $c_s^2\ll c^2$，すなわち $w\ll 1$ でありダスト優勢宇宙の近似がよい精度で成り立つ．そこでダスト優勢宇宙のことを単に物質優勢宇宙 (matter-dominated universe) ともいう．また $w=1/3$ なら $a\propto t^{1/2}$ である．これは輻射や質量ゼロの粒子からなる流体の場合に対応しており輻射優勢宇宙 (radiation-dominated universe) という．この場合も質量がゼロでなくても非常に相対論的な粒子からなる流体，すなわち温度が粒子の静止質量に比べて大きい流体 ($kT\gg mc^2$) であればよい近似で成り立つ．

(b)　$\Lambda=0$，$\rho=\rho_d+\rho_r$，$p=p_r=\frac{1}{3}\rho_r c^2$

この場合はダスト的物質（ρ_d）と輻射的物質（ρ_r）が同時に存在する場合であり，実際の宇宙の物質に対するよい近似であると考えられる．エネルギー保存則 (9.13) より $\rho_d\propto a^{-3}$，$\rho_r\propto a^{-4}$ である．そこで

$$A:=\frac{4\pi G}{3c^2}\rho_d a^3,\qquad B^2:=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_r a^4,$$

とおき，フリードマン方程式 (9.10) に代入すると

$$\frac{1}{c^2}\dot{a}^2=-K+\frac{2A}{a}+\frac{B^2}{a^2},$$

を得る．この式は t の初等関数として a を積分できない．そこで t の代わりに $d\eta = c\,dt/a(t)$ によって新しい時間座標 η を導入し上式を書き直す：

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = -Ka^2 + 2Aa + B^2 .$$

これを $\eta = 0$ で $a = 0$, $da/d\eta > 0$ なる初期条件で解くと，$\eta > 0$ に対して

$$a = \begin{cases} A(1-\cos\eta) + B\sin\eta; & K = +1, \\ \dfrac{A}{2}\eta^2 + B\eta; & K = 0, \\ A(\cosh\eta - 1) + B\sinh\eta; & K = -1, \end{cases} \tag{9.15}$$

を得る．時間反転の解は $\eta = 0$ で $da/d\eta < 0$ として $\eta < 0$ の方向へ解けばよいが，以後は $\eta > 0$ の解のみ考える．一方宇宙の固有時間 t は，$c\,dt = a\,d\eta$ を $\eta = 0$ で $t = 0$ なる初期条件で積分して

$$ct = \begin{cases} A(\eta - \sin\eta) + B(1-\cos\eta); & K = +1, \\ \dfrac{A}{6}\eta^3 + \dfrac{B}{2}\eta^2; & K = 0, \\ A(\sinh\eta - \eta) + B(\cosh\eta - 1); & K = -1, \end{cases} \tag{9.16}$$

となる．よってこの場合も時間は過去に有限である．また $K = +1$ の閉じた宇宙の場合には未来に向かっても有限である．図 9.2 はこの解の定性的振る舞いの図である．

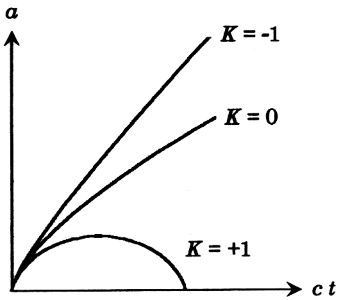


図 9.2

図9.2に示した解の振る舞いはニュートン力学的に解釈することができる．フリードマン方程式は，それが運動の積分であることの反映として a を力学変数とする力学的なエネルギー保存則と見なすことができる．そしてその形は $\Lambda=0$ のときニュートン理論的解釈が可能な形になっている．すなわち，(9.10) 式で $\Lambda = 0$ とおきその両辺に $a^2/2$ を掛け $M(a) = 4\pi\rho a^3/3$ とすると

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{GM(a)}{a} = -\frac{1}{2}Kc^2\,,$$

を得る．これは，単位質量当たりのエネルギーが $-Kc^2/2$ で与えられる半径 a の一様密度球のニュートン的運動の積分と同形である．これから $K > 0$ はニュートン的には束縛軌道に，$K < 0$ は双曲線軌道に，$K = 0$ は放物線軌道に対応することがわかる．

前節の (9.6) 式に対応して (9.15) 式と (9.16) 式を Kの符号によらずに統一的に表せば

$$\begin{aligned} a &= A\frac{(\cosh\sqrt{-K}\eta - 1)}{(-K)} + B\frac{\sinh\sqrt{-K}\eta}{\sqrt{-K}}\,, \\ ct &= A\frac{(\sinh\sqrt{-K}\eta - \sqrt{-K}\eta)}{\sqrt{-K}^3} + B\frac{(\cosh\sqrt{-K}\eta - 1)}{(-K)}\,, \end{aligned} \tag{9.17}$$

である．また上の時間座標 η を使うと，時空の線素は

$$ds^2 = a(\eta)^2\left(-d\eta^2 + d\sigma_K^2\right),$$

となる．すなわち計量は $g_{\mu\nu} = a^2\bar{g}_{\mu\nu}$ の形で与えられ，時間に依存しない計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ に共形的である．そこで時間座標 η のことを共形時間 (conformal time) という．

(9.17) 式から明らかなように，Kの符号にかかわらず a や t は $\eta \to 0$ で

$$a \to B\eta\,, \qquad ct \to \frac{B}{2}\eta^2\,,$$

と振る舞う．すなわち十分な宇宙初期には空間の曲率によらず常に空間的に平坦な輻射優勢宇宙として振る舞う．特に ρ と t の関係を見ると，$t \to 0$ で

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}\,,$$

という普遍的な関係が成り立つ.

(c) $p = \rho = 0,\ \Lambda > 0$

この場合はフリードマン方程式 (9.10) のみを解けばよい：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

$\Lambda/3 = \ell^2$ とおいてこれを解くと

$$a(t) = \begin{cases} \ell \cosh(ct/\ell)\ ; & K = +1, \\ a_0 \exp(ct/\ell)\ ; & K = 0, \\ \ell \sinh(ct/\ell)\ ; & K = -1, \end{cases} \tag{9.18}$$

を得る．この $K = 0$ の場合と (a) 項の (9.14) 式の $w = -1$ とは同じである．実際 $p = -\rho c^2$ とおくとエネルギー保存則 (9.13) より $\dot{\rho} = 0$ であり，エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} = -\rho c^2 g_{\mu\nu}\,; \quad \rho = 一定,$$

となり，$\Lambda = 8\pi G\rho/c^2$ とおけば宇宙定数項と区別がつかない．すなわち宇宙定数は状態方程式が $p = -\rho c^2$ で与えられる物質と考えることができる．最近このような物質として場の量子論において出現する真空のエネルギー密度が注目を浴びており，初期宇宙のモデルに重要な役割を果たしている．

(9.18) 式で与えた解は K の値によってそれぞれ一見異なる解に思えるが，実はすべて同じ時空の異なった座標での表示であり，ド・ジッター時空という．この時空の全領域を覆う座標は $K = +1$ の場合であり，$K = 0, -1$ の場合は部分的にしか覆っていないことが知られている．また一様等方宇宙のワイルテンソルがゼロであることとリッチテンソルが $R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ となることから，ド・ジッター時空はローレンツ計量をもった定曲率空間である．実際ド・ジッター時空は 5 次元ミンコフスキー空間,

$$ds^2 = -d\xi_0^2 + \sum_{i=1}^{4} d\xi_i^2,$$

に埋め込むことができ，その中の時間的な 4 次元双曲面

$$-\xi_0^2 + \sum_{i=1}^{4} \xi_i^2 = \ell^2,$$

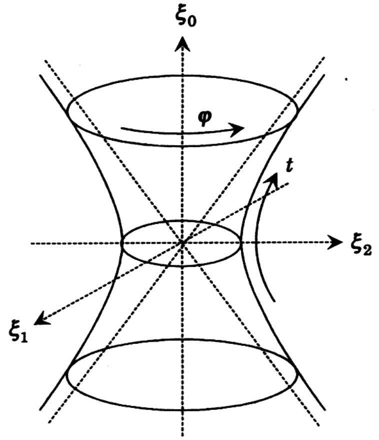


図 9.3

になっている（図 9.3）．よってこの時空は $O(4,1)$ 対称性をもつ．これをド・ジッター対称性という．$K=+1$ の表現で対応させると，γ_i を 4 次元ユークリッド空間中に埋めこまれた単位 3 次元球面上の位置ベクトルとして

$$\xi_0 = \ell \sinh(t/\ell), \quad \xi_i = \ell \cosh(t/\ell)\gamma_i\,; \quad \sum_{i=1}^{4} \gamma_i\gamma_i = 1\,,$$

である．

9.4　膨張宇宙と赤方偏移

1929 年，ハッブル（Hubble）は数十個の銀河についてその距離と光のスペクトルを調べ，遠方の銀河ほどスペクトルが系統的に赤方偏移していることを発見した．6.3 節の (6.44) 式で定義したように，赤方偏移 z は銀河が発する光の固有波長を λ_s，我々が観測する波長を λ_0 とすると $z = \lambda_0/\lambda_s - 1$ で与えられ，光源と観測者が相対運動するときに観測されるドップラー効果と解釈できる．銀河の我々に対する後退速度を v とすれば，v が光速 c に比べて十分小さいとき $z = v/c$ である．そこでハッブルは遠方の銀河ほどその距離 r に比例した速度で我々から遠ざかっていると結論した．すなわち，

$$v = H_0 r\,,$$

である．これをハッブルの法則 (Hubble's law) という．ここで比例係数 H_0 はハッブル定数と呼ばれ，観測から現在は $H_0 = 50 \sim 100\,\mathrm{km/s/Mpc}$ 程度の値であることが知られている[2]．そこで $H_0 = 100h\,\mathrm{km/s/Mpc}$ とおいて無次元パラメーター h で表すのが慣例である．この事実は，我々の宇宙が膨張しつつありそれぞれの銀河が宇宙の静止系に乗っていることで説明できる．そしてハッブル定数は現在の宇宙の膨張率 $H_0 = (\dot{a}/a)_{t_0}$ で与えられる．

ハッブルの法則を導出するために，まず膨張宇宙での赤方偏移を考えよう．いま (9.5) 式と (9.7) 式で与えられる線素に対して共動空間座標に固定した光源と観測者を考える．空間の一様等方性から一般性を失うことなく観測者（我々）を空間座標の原点 $\chi = 0$ におき，光源（銀河）を動径座標 $\chi = \chi_s$ の地点におくことができる．このとき図 9.4 のように，時刻 $t = t_1$ から $t_1 + \Delta t_1$ の間に光源が発した光を，時刻 $t = t_0$ から $t_0 + \Delta t_0$ の間に観測者が受け取ったとする．光の経路としては動径方向のみを考えればよいから

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a(t)^2 d\chi^2 = 0\,,$$

である．これより

$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)}\,, \tag{9.19}$$

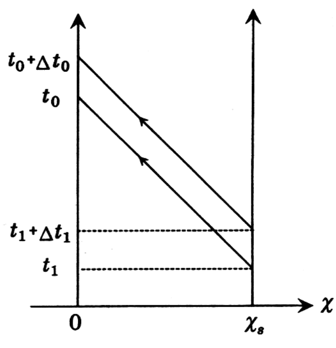


図 9.4

[2] $1\,\mathrm{Mpc} = 3.08 \times 10^{24}\,\mathrm{cm} = 326$ 万光年である．

を得る．したがって

$$\frac{\Delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)},$$

である．6.3 節の議論を思い出すと，これは

$$1 + z(\chi_s) = \frac{\lambda_0}{\lambda_s} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \tag{9.20}$$

を意味する．すなわち膨張宇宙 ($a(t_0) > a(t_1)$) では，過去に宇宙の静止系から発せられた光をやはり宇宙の静止系に留まる観測者が見ると，そのスケール因子に比例して赤方偏移して見える．これを宇宙論的赤方偏移 (cosmological redshift) という．

次に赤方偏移と光源までの距離との関係を考察しよう．ここで距離の概念について少し考える必要がある．我々が遠方の天体を観測するとき，いま見えるその姿は過去の姿であり，現在の宇宙時間 $t = t_0$ でのその姿を観測することは原理的に不可能である．よって現在のその天体までの固有距離を測ることも不可能である．そこで「ある天体までの距離」という概念は，観測データに基づいて操作的に定義されなければならない．その意味では宇宙論的赤方偏移は最も基本的な距離の定義ともいえる．そして天文学的に重要な距離の定義に，天体の見かけの明るさと大きさによって定義される距離がある．これらはそれぞれ光度距離 (luminosity distance)，視直径距離 (angular-diameter distance) と呼ばれる．

以下では主に光度距離について考察し，その一様等方宇宙における表式を求めよう．いまミンコフスキー時空で距離 d だけ離れて互いに静止した光源と観測者に関して，光源の固有光度を L_s とすれば，観測されるエネルギー流束は

$$f_0 = \frac{L_s}{4\pi d^2},$$

である．これから逆に，光源の固有光度 L_s を何らかの方法で推定できれば，観測されたエネルギー流束 f_0 から光源までの距離 d が

$$d^2 = \frac{L_s}{4\pi f_0},$$

と求まる．この操作を一般の時空に拡張したものを光度距離といい，

$$d_L^2 := \frac{L_s}{4\pi f_0}, \tag{9.21}$$

で定義される．

光度距離の一様等方宇宙での表式を求めるために再び図 9.4 の状況を考えよう．いま Δt_1 時間内に光源から放出された全エネルギーを ΔE_1, 光源を中心とした半径 χ_s の球面 S_L を Δt_0 時間内に通過する全エネルギーを ΔE_0 とすれば，光源の固有光度 L_s と球面 S_L を通過する全光度 L_0 はそれぞれ，

$$L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}, \qquad L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1},$$

で与えられる．一方赤方偏移の定義式 (6.44) から

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z,$$

である．これらの式から

$$L_0 = \frac{L_s}{(1+z)^2}, \tag{9.22}$$

を得る.ここで $t = t_0$ における球面 S_L の面積要素が $dS_L(t_0) = (a(t_0)\Sigma_K(\chi_s))^2 \times d\Omega^2$ であることに注意すると，観測されるエネルギー流束は

$$f_0 = \frac{L_0}{4\pi\,(a(t_0)\Sigma_K(\chi_s))^2},$$

で与えられる．光度距離の定義式 (9.21) にこれを代入し (9.22) 式を使うと

$$d_L = a(t_0)\Sigma_K(\chi_s)\left(\frac{L_s}{L_0}\right)^{1/2} = a(t_0)\Sigma_K(\chi_s)(1+z), \tag{9.23}$$

を得る．ここで χ_s は (9.19) 式で与えられる．

d_L の表式 (9.23) のままではそれが宇宙モデルとどう関係するのか，またハッブルの法則を再現するのかどうかが不明である．これを明らかにするためにまず χ_s の表式 (9.19) を

$$\chi_s = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{c\,da}{Ha^2} = \frac{c}{H_0 a_0}\int_1^{1+z} \frac{dy}{F(y)},$$

と書き直す．ここで $a_1 = a(t_1)$, $a_0 = a(t_0)$, $H = \dot{a}/a$, $y = a_0/a(t)$ であり，$F(y)$ は与えられた宇宙モデルに関して，膨張率 H をスケール因子 a の関数と見なしたときの現在の膨張率 H_0 との比，

$$F(1+z) := \frac{H}{H_0}; \quad 1+z = \frac{a_0}{a(t)}, \tag{9.24}$$

で定義される関数である．これを Σ_K の一般式 (9.6) に代入して

$$\Sigma_K(\chi_s) = \frac{c}{H_0 a_0\sqrt{-k_0}} \sinh\left(\sqrt{-k_0}R(z)\right) ; \tag{9.25}$$

$$k_0 := \frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}, \qquad R(z) := \int_1^{1+z} \frac{dy}{F(y)},$$

と書く．ここで k_0 は現在の宇宙の空間的曲率の大きさを表す無次元パラメーターである（次節参照）．また $R(z)$ は $z=0$ のまわりで

$$R(z) = z - \frac{z^2}{2}F'(1) + \frac{z^3}{6}\left(2F'(1)^2 - F''(1)\right) + O(z^4),$$

と展開される宇宙モデルに依存した関数である．(9.25) 式を d_L の表式 (9.23) に代入すると

$$\begin{aligned} d_L &= \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{-k_0}} \sinh\left(\sqrt{-k_0}R(z)\right) \\ &= \frac{c(1+z)}{H_0}\left(z - \frac{z^2}{2}F'(1) + \frac{z^3}{6}\left(2F'(1)^2 - F''(1) - k_0\right) + O(z^4)\right), \end{aligned} \tag{9.26}$$

を得る．これが一様等方宇宙における光度距離の一般形であり，右辺が z の関数として与えられることから（光度）距離-赤方偏移関係 ((luminosity) distance-redshift relation) と呼ばれる．特に $z \ll 1$ のときは，z の最低次で

$$d_L = \frac{cz}{H_0} \iff cz = H_0 d_L,$$

となりハッブルの法則を得る．これからわかるようにハッブルの法則は赤方偏移が小さい銀河に対してのみ成り立ち，赤方偏移が非常に大きい銀河 ($z \gtrsim 1$) に対しては距離と赤方偏移の比例関係は崩れる．

さて視直径距離についても触れておこう．視直径距離も光度距離と類似の方法で定義される．すなわち，光源の視線方向に垂直な固有の直径を $\Delta\ell$，観測者がそれを見込む角を $\Delta\theta$ とすると，ミンコフスキー時空では

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\ell}{d},$$

である．そこで光源の固有直径 $\Delta\ell$ が推定できたとして

$$d_A := \frac{\Delta\ell}{\Delta\theta}, \tag{9.27}$$

によって一般の時空における視直径距離 d_A を定義する．

一様等方宇宙では，観測者を中心とする半径 χ_s の球面 S_A 上に光源がある．よって $t=t_1$ での球面 S_A の面積要素が $dS_A(t_1)=(a(t_1)\Sigma_K(\chi_s))^2\,d\Omega^2$ であることから

$$\Delta\ell = a(t_1)\Sigma_K(\chi_s)\Delta\theta\,,$$

が成り立つ．したがって d_A は

$$d_A = a(t_1)\Sigma_K(\chi_s)\,, \tag{9.28}$$

と表される．(9.23) 式と (9.28) 式を比較すると，光度距離と視直径距離の間に

$$d_L = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}(1+z)d_A = (1+z)^2 d_A\,,$$

という関係があることがわかる．この関係は一様等方宇宙以外の任意の時空上でも成立することが知られており，光度距離と視直径距離の相反関係（reciprocity relation）と呼ばれる．

9.5 宇宙論のパラメーター

我々の宇宙が具体的にどのような宇宙モデルで表されるかを調べ観測と比較するためには，フリードマン方程式の解をいくつかのパラメーターで特徴づけると便利である．特に観測との対応では現在の宇宙を基準にしたパラメーターの選び方が望ましい．そこで現在の宇宙の膨張率を表すハッブル定数 H_0 に加えて，フリードマン方程式 (9.10) とその時間微分の式 (9.12) に現れる各項を現在の宇宙時刻 $t=t_0$ で評価し，それを H_0 で無次元化したものをパラメーターとして選ぶ．すなわち

$$q_0 := -\frac{1}{H_0^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_0\,, \tag{9.29}$$

$$\Omega_0 := \sum_i \Omega_{i0}\,;\quad \Omega_{i0} = \frac{8\pi G\rho_{i0}}{3H_0^2}\,, \tag{9.30}$$

$$\lambda_0 := \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}\,, \tag{9.31}$$

$$k_0 := \frac{Kc^2}{a_0^2 H_0^2}\,, \tag{9.32}$$

である．ここで添字 0 は現在時刻での値を表す．q_0 は減速パラメーター (deceleration parameter) と呼ばれ，Ω_0 は密度パラメーター (density parameter) と呼ばれる．Ω_{i0} は様々な物質 ρ_i が混在する場合の各物質の密度パラメーターへの寄与である．λ_0 と k_0 はそれぞれ，宇宙定数と空間曲率のフリードマン方程式への寄与を無次元化したパラメーターである．これらに対しては決まった慣習的呼称はない．9.3 節の (c) 項で指摘したように，宇宙定数に関してはそれを圧力が $p_v = -\rho_v c^2$ で与えられる真空のエネルギー密度 $\rho_v = \Lambda c^2/(8\pi G)$ と見なすことができる．この見方に立つと $\lambda_0 = \Omega_{v0}$ であり，密度パラメーターの定義が $\Omega_0 + \lambda_0 \to \Omega_0$ と変更される．しかし無用の混乱を避けるために以下ではこの見方は取らない．

(9.10) 式と (9.12) 式からこれらのパラメーター間には

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{2}\sum_i \Omega_{i0}(1+3w_{i0}) - \lambda_0\,, \\
k_0 &= \sum_i \Omega_{i0}(1+w_{i0}) - q_0 - 1 = \Omega_0 + \lambda_0 - 1\,,
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

なる関係が成り立つ．ここで w_i はそれぞれの物質の圧力とエネルギー密度の比 $w_i = p_i/(\rho_i c^2)$ である．上の第 2 式からわかるように，宇宙定数がゼロならば Ω_0 が 1 より大きいか小さいかによって宇宙の空間曲率が正か負かに分かれる．そこで

$$
\rho_{cr} := \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3H^2}{8\pi G}\,,
$$

によって質量密度 ρ_{cr} を定義し，これを臨界密度 (critical density) と呼ぶ．宇宙の空間的構造は時間によらないから，任意の時刻において $\rho > \rho_{cr}$ ならば $\Omega_0 > 1$，$\rho < \rho_{cr}$ ならば $\Omega_0 < 1$ である．ちなみに現在の臨界密度は

$$
\rho_{cr0} = 2 \times 10^{-29} h^2\,\mathrm{g/cm^3}\,,
$$

と表される．ここで h は前節で導入したハッブル定数を表す無次元パラメーター，$h = H_0/(100\,\mathrm{km/s/Mpc})$ である．

具体的な例として現在の宇宙がダスト優勢宇宙である場合を考える．これは現実の宇宙でよい近似で成り立っていると信じられているモデルである．この

とき $\Omega_0 = \Omega_{d0}$, $w_{d0} = 0$ より (9.33) 式は

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 - \lambda_0\,,$$
$$k_0 = \frac{3}{2}\Omega_0 - q_0 - 1 = \Omega_0 + \lambda_0 - 1\,, \tag{9.34}$$

となる．よって宇宙定数がゼロ（$\lambda_0 = 0$）なら

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0\,, \qquad k_0 = \Omega_0 - 1,$$

であり，さらに空間的に平坦（$k_0 = 0$）なら $q_0 = 1/2$, $\Omega_0 = 1$ である．

上で取り上げた宇宙論的パラメーターはすべてアインシュタイン方程式に直接現れる局所的物理量である．これに対して宇宙モデルの解を求めて初めて決まる重要な物理量に宇宙の年齢 t がある．フリードマン方程式より t は積分形で

$$H_0 t = \int_0^a \frac{H_0 da}{Ha} = \int_{1+z}^{\infty} \frac{dy}{yF(y)}\,,$$

と書ける．ここで $F(y)$ は (9.24) 式で定義した $y = 1 + z$ の関数である．ダスト優勢宇宙では

$$F(y) = F_d(y) := \sqrt{\Omega_0 y^3 - k_0 y^2 + \lambda_0}\,,$$

で与えられる．ここで Ω_0, k_0, λ_0 は (9.34) 式の関係を満たす．この場合現在の宇宙年齢は

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_1^{\infty} \frac{dy}{yF_d(y)}\,,$$

である．これより一般に，k_0 または λ_0 を固定したとき Ω_0 が小さいほど宇宙年齢が長くなることがわかる．しかし $F_d(y)$ の振る舞いから，$\lambda_0 = 0$ ならば宇宙年齢に

$$t_0 < \frac{1}{H_0} = 3 \times 10^{17} h^{-1}\,\mathrm{s} = 100 h^{-1}\,\text{億光年}\,,$$

なる上限が存在する．これは宇宙年齢に対する強い制限となる．特に最も簡単な $k_0 = \lambda_0 = 0$（アインシュタイン-ド・ジッター宇宙）の場合には $H_0 t_0 = 2/3$ となり，

$$t_0 = 2 \times 10^{17} h^{-1}\,\mathrm{s} = 65 h^{-1}\,\text{億光年}\,,$$

である．

1995 年現在の観測データは，ハッブル定数が $h = 0.8 \pm 0.2$ の値であることを強く示唆している．これは，我々の宇宙がアインシュタイン-ド・ジッター宇宙であれば宇宙年齢が

$$t_0 = 80 \pm 20 \text{ 億光年},$$

にしかならないことを意味する．また $k_0 \neq 0$ としても $\lambda_0 = 0$ であれば

$$t_0 < 100 \pm 25 \text{ 億光年},$$

であり，最大で 125 億光年にしかならない．ところが星の進化の理論から観測される最も古い星の年齢を評価すると，理論や観測の誤差を含めても 130 億光年よりは古いと考えられている．これは明らかな矛盾である．この矛盾を，星の進化論や観測精度の問題やハッブル定数の観測精度の問題として捉えることはもちろん可能である．また誤差を少し甘く見積もれば $\lambda_0 = 0$ の宇宙でもぎりぎり可能である．しかし論理的に最も単純な解は宇宙定数を導入することである．宇宙定数が場の量子論における真空のエネルギー密度と見なせることは既に触れた．果たして我々の宇宙に宇宙定数が存在するかどうかは，重力も含めた相互作用の統一理論を構築する際に重要な意味をもつと考えられ，現在の宇宙論の大きな問題として様々な側面からの研究がなされている．アインシュタインの「人生最大の失敗」は，ひょっとするとアインシュタインが生涯夢見て果たせなかった力の統一理論の最も重要な要素の一つとして現実の宇宙に存在しているのかもしれない．

問　　題

9.1　(9.3) 式と (9.5) 式が等価であることを確かめよ．

9.2　宇宙定数がない ($\Lambda = 0$) ダスト優勢宇宙 ($p = 0$) における c/H_0 で規格化した光度距離 $H_0 d_L/c$ を z と Ω_0 の関数として表せ．また $1/H_0$ で規格化した宇宙年齢 $H_0 t_0$ を Ω_0 の関数として表せ．

9.3　正の宇宙定数が存在すると宇宙年齢 $H_0 t_0$ はいくらでも大きくできる．ダスト優勢宇宙の場合にこれを示せ．

9.4　$\rho = \Lambda = 0$（真空）の開いた宇宙に対するフリードマン方程式を解け．この解はミルン宇宙 (Milne universe) として知られているが，ミルン宇宙は実はミンコフスキー時空の一部分に対応している．これを示せ．

問題の略解

第2章

2.2　リーマンテンソルの対称性を整理すると $R_{ijk\ell} = R_{[ij][k\ell]}$ $\cdots$ (1), $R_{i[jk\ell]} = 0$ $\cdots$ (2), $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$ $\cdots$ (3), の三つであるが，このうち (3) は (1) と (2) から次のようにして導かれる：

$$
\begin{aligned}
2R_{ijk\ell} &= R_{ijk\ell} - R_{jik\ell} = R_{ijk\ell} + R_{jk\ell i} + R_{j\ell ik} \\
&= R_{ijk\ell} - R_{kj\ell i} - R_{\ell jik} = R_{ijk\ell} + R_{k\ell ij} + R_{kij\ell} + R_{\ell ikj} + R_{\ell kji} \\
&= R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} + 2R_{k\ell ij} = 2R_{k\ell ij}\,.
\end{aligned}
$$

よって (1), (2) のみを考えればよい．(1) の自由度の数から (2) の自由度の数を引いて

$$
\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - n \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}\,.
$$

2.3　$\bar{g}^{ij} = \phi^{-2} g^{ij}$ に注意して，

$$
\bar{\Gamma}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + \frac{1}{\phi}\left(\phi_{,k}\delta^i_j + \phi_{,j}\delta^i_k - g_{jk}g^{i\ell}\phi_{,\ell}\right).
$$

第3章

3.1　ラグランジュ関数は

$$
L = \frac{1}{2}\left(-\dot{t}^2 + \sum_{i=1}^{3} e^{2\alpha_i(t)}(\dot{x}^i)^2\right).
$$

これからオイラー・ラグランジュ方程式を書き下すと

$$\ddot{t}+\sum_{i=1}^{3}e^{2\alpha}\alpha_{i,t}(\dot{x}^i)^2, \qquad \ddot{x}^i+2\sum_{i=1}^{3}\alpha_{i,t}\dot{t}\dot{x}^i.$$

よってゼロでない接続は $t=x^0$ として

$$\Gamma^0{}_{ii}=e^{2\alpha_i}\Gamma^i{}_{0i}=e^{2\alpha_i}\alpha_{i,t} \quad (i\text{ の和は取らない}).$$

3.2 計量 g_{ij} をもつ時空上でのヌル測地線を $x^\mu=z^\mu(\lambda)$，そのアフィンパラメーターを λ とし，$k^\mu=dz^\mu/d\lambda$ とおく．すなわち，

$$\frac{d}{d\lambda}k^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=0, \qquad g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu=0.$$

ここで第 2 章の問題 2.3 の結果を使うと，計量 $\bar{g}_{ij}$ の時空上で

$$\frac{d}{d\lambda}k^\mu+\bar{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=\frac{d}{d\lambda}k^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta+\frac{2}{\phi}\phi_\alpha k^\mu=k^\mu\frac{1}{\phi^2}\frac{d\phi^2}{d\lambda}.$$

よって両辺を ϕ^2 で割って整理すると

$$\frac{1}{\phi^2}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{k^\mu}{\phi^2}\right)+\bar{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{k^\alpha}{\phi^2}\frac{k^\beta}{\phi^2}=0.$$

これは，$d\bar{\lambda}=\phi^2\big(z(\lambda)\big)d\lambda$ とすると $\bar{\lambda}$ をアフィンパラメーターとする $\bar{g}_{ij}$ 上の測地線方程式である．この事実から時空の因果関係が共形変換によって不変に保たれることがわかる．

3.3 (3.42) 式を微分して再び (3.42) 式を使うと，

$$\frac{d^2}{d\tau^2}Z^{(i)}=\left[\left(\frac{d}{d\tau}u_{(i);(j)}\right)+u_{(i);(k)}u^{(k)}{}_{;(j)}\right]Z^{(j)}.$$

これを (3.43) 式と比較すると，

$$\frac{d}{d\tau}u_{(i);(j)}=-u_{(i);(k)}u^{(k)}{}_{;(j)}-c^2R_{(i)(0)(j)(0)}.$$

両辺の反対称部分，対称トレースなし部分，トレース部分をそれぞれ取ると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\omega_{(i)(j)}&=-\frac{2}{3}\omega_{(i)(j)}\theta-\left(\omega_{(i)(k)}\sigma^{(k)}{}_{(j)}-\omega_{(j)(k)}\sigma^{(k)}{}_{(i)}\right),\\
\frac{d}{d\tau}\sigma_{(i)(j)}&=-\frac{2}{3}\sigma_{(i)(j)}\theta-\left(\omega_{(i)(k)}\omega^{(k)}{}_{(j)}+\frac{2}{3}\delta_{ij}\omega^2\right)\\
&\quad-\left(\sigma_{(i)(k)}\sigma^{(k)}{}_{(j)}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\sigma^2\right)-c^2\left(R_{(i)(0)(j)(0)}-\frac{1}{3}\delta_{ij}R_{(0)(0)}\right),\\
\frac{d}{d\tau}\theta&=-\frac{1}{3}\theta^2-\frac{2}{3}\left(\sigma^2-\omega^2\right)-c^2R_{(0)(0)}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{(i)(j)}\sigma^{(i)(j)}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{(i)(j)}\omega^{(i)(j)}, \qquad R_{(0)(0)} = R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\,,$$

である．

3.4 問題 3.3 と同様にして

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}k_{(A);(B)} = -k_{(A);(C)}k^{(C)}{}_{;(B)} - R_{(A)(*)(B)(*)}\,,$$

を得る．これより $\omega_{(A)(B)}$，$\sigma_{(A)(B)}$，θ に対する方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\omega_{(A)(B)} = -\omega_{(A)(B)}\theta\,,\\
&\frac{d}{d\lambda}\sigma_{(A)(B)} = -\sigma_{(A)(B)} - C_{(A)(*)(B)(*)}\,,\\
&\frac{d}{d\lambda}\theta = -\frac{1}{2}\left(\theta^2 + \sigma^2 - \omega^2\right) - R_{(*)(*)}\,.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{(A)(B)}\sigma^{(A)(B)}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{(A)(B)}\omega^{(A)(B)},\\
&C_{(A)(*)(B)(*)} = C_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_{(A)}e^\nu_{(B)}k^\alpha k^\beta, \qquad R_{(*)(*)} = R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu,
\end{aligned}$$

である．時間的測地線の場合と異なり，$\sigma_{(A)(B)}$ の式にはワイルテンソルが現れることに注意．

第4章

4.3 キリングベクトルの 2 階微分を反対称化し，キリング方程式を使うと

$$\xi_{\mu;\nu;\alpha} + \xi_{\alpha;\mu;\nu} = R^\beta{}_{\mu\nu\alpha}\xi_\beta\,.$$

これに添字を $(\mu,\nu,\alpha) \rightarrow (\nu,\alpha,\mu)$ とおき換えたものを加え，$(\mu,\nu,\alpha) \rightarrow (\alpha,\mu,\nu)$ とおき換えたものを引き，リーマンテンソルの対称性を使うと

$$\xi_{\mu;\nu;\alpha} = R^\beta{}_{\alpha\mu\nu}\xi_\beta\,,$$

を得る．いま空間の任意の点 P を通る任意の曲線 $x^\mu = z^\mu(t)$ とその接ベクトル $V^\mu = dz^\mu/dt$ を考えると，上式とキリング方程式より

$$\frac{D}{dt}\xi_\mu = \xi_{[\mu;\nu]}V^\nu\,, \qquad \frac{D}{dt}\xi_{[\mu;\nu]} = R^\beta{}_{\alpha\mu\nu}\xi_\beta V^\alpha\,.$$

これより点 P において ξ_μ と $\xi_{[\mu;\nu]}$ を与えると，点 P を基点とする任意の曲線に沿って上式を積分することによって，その他の点でのキリングベクトルが完全に決まってしまうことがわかる．よって独立なキリングベクトルの個数は最大でも ξ_μ と $\xi_{[\mu;\nu]}$ のもつ代数的独立な成分の個数，すわなち $n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$ である．

4.4 A, B が r のみの関数であることに注意して

$$\Box\phi=-\frac{1}{A}\partial_t^2\phi+\frac{1}{r^2\sqrt{AB}}\partial_r\left(r^2\sqrt{\frac{A}{B}}\partial_r\phi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\phi\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi\,.$$

また，

$$T_0{}^\nu{}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T_0{}^\nu\right)-\Gamma_{\alpha,0\nu}T^{\alpha\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T_0{}^\nu\right)-\frac{1}{2}g_{\alpha\nu,0}T^{\alpha\nu},$$

であるが，$g_{\mu\nu}$ が座標 $x^0=t$ に依存しないから最後の項は消える．よって全微分形になる．これは (3.27) 式の計量に時間的キリングベクトル $\xi^\mu\partial_\mu=\partial/\partial t$ が存在し，$\xi^\mu T_\mu{}^\nu=T_0{}^\nu$ となっていることの帰結である．

第5章

5.1 まずミンコフスキー時空からの線形摂動の範囲で

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}=\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\beta}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta,\nu}\,,\qquad \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\beta\mu,\nu}+h_{\beta\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\beta}\right)\,.$$

ここで，ニュートン極限を考えると $h_{00}=-2\phi_N/c^2$ 以外の $h_{\mu\nu}$ はゼロでかつその空間微分のみが残る．よって $\Gamma^0{}_{0i}=\Gamma^i{}_{00}=-\phi_{N,ij}/c^2$ 以外の接続はゼロとなり，リーマンテンソルで残るのは $R^i{}_{0j0}=-R^0{}_{i0j}=\phi_{N,ij}/c^2$ のみである．一方，測地線偏差の方程式では $e^\mu_{(\nu)}=\delta^\mu_\nu$，$\tau=t$ としてよいから

$$\frac{d^2}{dt^2}Z^i=-c^2R^i{}_{0j0}Z^j=-\phi_{N,ij}Z^j\,,$$

となる．これはニュートン重力における点 r^i と r^i+Z^i との間に働く潮汐効果を表す方程式である．

5.2 I_ϕ を ϕ と $g_{\mu\nu}$ でそれぞれ変分すると，運動方程式とエネルギー運動量テンソルとして

$$-\Box\phi+\frac{dV(\phi)}{d\phi}=0,$$
$$T^{\mu\nu}=\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}-g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha}\phi_{;\beta}+V(\phi)\right),$$

を得る．

5.3 (a) $m\dfrac{D^2z^\mu}{d\tau^2}=\dfrac{e}{c}F^\mu{}_\nu\dfrac{dz^\nu}{d\tau}$.

(b) I_p は $\int d^4x\delta^{(4)}(x-z)=1$ なる 4 次元デルタ関数を使って

$$I_p=\int d^4x\int d\tau\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)\left(\frac{1}{2}mg_{\mu\nu}(x)\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu+\frac{e}{c}A_\mu(x)\dot{z}^\mu\right),$$

と書き直せる．これを A_μ で変分して $\delta I_p/\delta A_\mu=e\int d\tau\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)\dot{z}^\mu/c$. 一方 I_{em} を A_μ で変分すると $\delta I_{em}/\delta A_\mu=-\sqrt{-g}F^{\mu\nu}{}_{;\nu}/(4\pi c)$. よってマックスウェル方程式は

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=4\pi e\int d\tau\frac{\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)}{\sqrt{-g}}\dot{z}^\mu=:4\pi j^\mu.$$

(c) $T_p^{\mu\nu}=m\displaystyle\int c\,d\tau\frac{\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)}{\sqrt{-g}}\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu$.

(d) デルタ関数の微分に関して

$$\dot{z}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)=-\dot{z}^\nu\frac{\partial}{\partial z^\nu}\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)=-\frac{d}{d\tau}\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big),$$

と変形できることを使うと，

$$\begin{aligned}T_p^{\mu\nu}{}_{;\nu}&=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\right)+\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}\\&=\frac{m}{\sqrt{-g}}\int c\,d\tau\left(-\frac{d}{d\tau}\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)\right)\dot{z}^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}\\&=\frac{m}{\sqrt{-g}}\int c\,d\tau\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)\ddot{z}^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}\\&=\frac{m}{\sqrt{-g}}\int c\,d\tau\frac{\delta^{(4)}\big(x-z(\tau)\big)}{\sqrt{-g}}\frac{D^2}{d\tau^2}z^\mu=F^\mu{}_\nu j^\nu.\end{aligned}$$

ここで最後の等式では粒子の運動方程式を使った．一方 $T^{\mu\nu}_{em;\nu}=-F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu}{}_{;\nu}/(4\pi)$ であるから結局，

$$\left(T^{\mu\nu}_{em}+T^{\mu\nu}_p\right)_{;\nu}=\frac{1}{4\pi}F^\mu{}_\alpha\left(-F^{\alpha\nu}{}_{;\nu}+4\pi j^\alpha\right)=0.$$

すなわち，粒子が運動方程式を満たし電磁場がマックスウェル方程式を満たすと，系の全エネルギー運動量テンソルは保存則を満たす．

第6章

6.1 シュバルツシルト座標から $r=(1+R_g/R)^2R$, $r_g=4R_g$ の変換になっている．また，さらに $R=R_g^2/\tilde{R}$ と変換してもやはり $r=\left(1+R_g/\tilde{R}\right)^2\tilde{R}$ となり，もと

の R との関係と同形である．よって $R > R_g$ ($\tilde{R} < R_g$) を (6.57) 式で定義した領域 I に対応させると，$R < R_g$ ($\tilde{R} > R_g$) は領域 IV に対応しており，$R = 0$ ($\tilde{R} \to \infty$) は領域 IV の空間的無限遠である．すなわち，この計量はシュバルツシルト時空の領域 I と IV を同時に覆い，その $t =$ 一定超曲面はアインシュタイン・ローゼン橋を表す．

6.2　(6.22) 式を一様密度の場合に計算すると

$$M_p = 4\pi\rho \int_0^R \left(1 - \frac{r_g r^2}{R^3}\right)^{-1/2} r^2 dr = \frac{3M}{2\sin^2\chi_*}\left(\frac{\chi_*}{\sin\chi_*} - \cos\chi_*\right);$$
$$\sin\chi_* = \sqrt{\frac{r_g}{R}},$$

を得る．特に $r_g/R \to 8/9$ では $M_p \approx 1.64M$ となる．すなわち重力の束縛エネルギーは $E_B = (M - M_p)c^2 \approx -0.39M_pc^2$ となり，静止質量の 4 割近くに達する．

6.3　$r_g = 3GM_\odot/c^2 = 3$ km, $R = 12.5$ km を $z = (1 - r_g/R)^{-1/2} - 1$ に代入すると $1 - r_g/R = 16/25$ より $z = 0.25$ を得る．

第 7 章

7.1　$\tilde{E} = 1$，$\tilde{L}_z = 0$ とおくと動径方向の式は $\dot{r}^2 = r_g c^2/r$. 半径は時間とともに減少するから $\dot{r} = -c\sqrt{r_g/r}$. これを積分して

$$\frac{c\tau}{r_g} = -\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} + \text{定数}.$$

明らかに有限の半径からは有限の固有時間内に事象の地平面を通過し，$r = 0$ の特異点に達する．また t に関しては $\dot{t} = (1 - r_g/r)^{-1}$ より $c\,dt/dr = c\dot{t}/\dot{r} = -(r/r_g)^{3/2}(r/r_g - 1)^{-1}$. これを積分して

$$\frac{ct}{r_g} = -\left[\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2} + 2\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} + \ln\frac{(r/r_g)^{1/2} - 1}{(r/r_g)^{1/2} + 1}\right] + \text{定数}.$$

特に $r \to r_g$ の極限では $\sqrt{r/r_g} - 1 \propto r - r_g \propto e^{-ct/r_g}$ のように振る舞う．

7.2　粒子の 4 元速度は

$$u^\mu = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}\right) = c\left(\frac{1}{1 - r_g/r}, -\sqrt{r_g/r}\right).$$

一方動径方向外向きに進む光の 4 元運動量は

$$k^\mu = \left(\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}\right) = \frac{E}{c}\left(\frac{1}{1 - r_g/r}, 1\right).$$

よって $(-g_{\mu\nu}k^\mu u^\nu) = E/(1-\sqrt{r_g/r})$ である．これより赤方偏移は

$$z = \frac{(-g_{\mu\nu}k^\mu u^\nu)_r}{(-g_{\mu\nu}k^\mu u^\nu)_\infty} - 1 = \frac{\sqrt{r_g/r}}{1-\sqrt{r_g/r}} = \frac{1}{\sqrt{r/r_g}-1}\,.$$

ここで $r \to r_g$ のとき，問題 7.1 の解から $\sqrt{r/r_g}-1 \propto e^{-ct/r_g}$．よって $z \to \mathrm{const.} \times e^{ct/r_g}$ のように時間とともに指数関数的に増大する．

7.3 (a) $D_\ell = 25\,\mathrm{kpc}$, $D_s = 50\,\mathrm{kpc}$, $D_{\ell s} = D_\ell - D_s = 25\,\mathrm{kpc}$, $M = 0.1 M_\odot$ を (7.40) 式の α_0 に代入すると

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{0.6\,\mathrm{km}}{50\,\mathrm{kpc}}} = \sqrt{\frac{0.6}{1.5\times 10^{18}}} = 6.3\times 10^{-10}\,(\mathrm{rad}) = 1.3\times 10^{-4\prime\prime}.$$

(b) 図 7.6 で ϕ が時間とともに $\phi(t) = \sqrt{b^2\alpha_0^2 + \omega^2 t^2}$ と変化する．一方 (7.44) 式を ϕ について解き $\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_c$ とおくと増光が $\mathcal{A}_c$ となる臨界角度 ϕ_c は

$$\phi_c = \sqrt{2}\left(\frac{\mathcal{A}_c}{\sqrt{\mathcal{A}_c^2-1}} - 1\right)^{1/2}\alpha_0\,.$$

$\phi(t) = \phi_c$ とおいて時間について解くと，その時刻 t_c は

$$t_c = \pm\frac{\sqrt{2\left(\mathcal{A}_c/\sqrt{\mathcal{A}_c^2-1}-1\right)-b^2}}{\omega}\,.$$

よって

$$\Delta t = 2|t_c| = 2\frac{\sqrt{2\left(\mathcal{A}_c/\sqrt{\mathcal{A}_c^2-1}-1\right)-b^2}}{\omega}\,.$$

$\mathcal{A}_c = 1.3,\ b = 0.2,\ \omega = 10^{-6}/\mathrm{sec}$ を代入して $\Delta t = 2.1\times 10^6\,\mathrm{sec}$ =約 24 日を得る．また最大増光率は $\mathcal{A}_{\max} = (b^2+2)/(b\sqrt{b^2+4}) = 10.1$ である．

(c) $V_\perp = D_\ell\,\omega\alpha_0 = 470\,\mathrm{km/s}$.

第 8 章

8.2 球座標で射影テンソル P_{ab} を表すと，$\theta^A = (\theta, \varphi)$ として，

$$P_{rr} = P_{rA} = 0\,,\quad P_{AB} = r^2\gamma_{AB}\,;\quad \gamma_{AB}d\theta^A d\theta^B = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\,.$$

これより

$$h^{TT}_{rr} = h^{TT}_{rA} = 0,\quad h^{TT}_{AB} = \left(\delta^C_A\delta^D_B - \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{CD}\right)\psi_{CD}\,.$$

具体的には

$$h_{\theta\theta}^{TT} = -\frac{h_{\varphi\varphi}^{TT}}{\sin^2\theta} = \left(\psi_{\theta\theta} - \frac{\psi_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta}\right)\Big/ 2, \quad h_{\theta\varphi}^{TT} = \psi_{\theta\varphi}\,.$$

4 重極モーメントとの関係は

$$h_{AB}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r}\left(\delta_A^C\delta_B^D - \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{CD}\right)\frac{\partial x^i}{\partial\theta^C}\,\ddot{\not{I}}_{ij}\,\frac{\partial x^j}{\partial\theta^D}\,.$$

8.3 系の重心を原点に取り，軌道面を $z^3=0$ 平面，軌道角速度を Ω とするとこの系の 4 重極モーメントのゼロでない成分は

$$I_{11} = \mu R^2\cos^2\Omega t\,, \quad I_{22} = \mu R^2\sin^2\Omega t\,, \quad I_{12} = \mu R^2\sin\Omega t\cos\Omega t\,.$$

ここで $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ は系の還元質量である．よって還元 4 重極モーメントは

$$\not{I}_{11} = -\not{I}_{22} = \frac{1}{2}\mu R^2\cos 2\Omega t\,, \quad \not{I}_{12} = \frac{1}{2}\mu R^2\sin 2\Omega t\,.$$

またケプラー運動であるから軌道角速度は $\Omega = (GM/R^3)^{1/2}$ $(M = m_1+m_2)$ で与えられる．

(a) 問題 8.2 の答を使って極座標で表すと，いまの場合，

$$h_{AB}^{TT}(t,\overrightarrow{x}) = \frac{2G}{c^4 r}\left(\delta_A^C\delta_B^D - \frac{1}{2}\gamma_{AB}\gamma^{CD}\right)\frac{\partial x^E}{\partial\theta^C}\,\ddot{\not{I}}_{EF}(t-r/c)\,\frac{\partial x^F}{\partial\theta^C}\,,$$

となる．これを計算して，結果の振幅を正しく見るために規格化した基底 $\hat{d}\theta = r\,d\theta$，$\hat{d}\varphi = r\sin\theta d\varphi$ の成分 (ハットをつける) で表す．すなわち $h_{\hat\theta\hat\theta}^{TT} = h_{\theta\theta}^{TT}/r^2$，$h_{\hat\varphi\hat\varphi}^{TT} = h_{\varphi\varphi}^{TT}/(r^2\sin^2\theta)$，$h_{\hat\theta\hat\varphi}^{TT} = h_{\theta\varphi}^{TT}/(r^2\sin\theta)$ である．こうすると

$$\begin{aligned}
h_{\hat\theta\hat\theta}^{TT} &= -h_{\hat\varphi\hat\varphi}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)(\ddot{\not{I}}_{11}\cos 2\varphi + \ddot{\not{I}}_{12}\sin 2\varphi) \\
&= -\frac{4G^2\mu M}{c^4 r R}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\big(\Omega(t-r/c)-\varphi\big), \\
h_{\hat\theta\hat\varphi}^{TT} &= \frac{2G}{c^4 r}\cos\theta(-\ddot{\not{I}}_{11}\sin 2\varphi + \ddot{\not{I}}_{12}\cos 2\varphi) \\
&= -\frac{4G^2\mu M}{c^4 r R}\cos\theta\sin 2\big(\Omega(t-r/c)-\varphi\big),
\end{aligned}$$

を得る．これより重力波は軌道面に垂直な方向に最も強く出ていることがわかる．

(b) (8.48) 式に (a) で求めた還元 4 重極モーメントを代入して，

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} = \frac{32G^4M^3\mu^2}{5c^5R^5} = \frac{c^5}{5G}\left(\frac{2GM}{c^2R}\right)^5\left(\frac{\mu}{M}\right)^2.$$

$m_1 = m_2$ のとき $\mu/M = 1/4$ である．また $M = 3M_\odot$ であるから $R = 10^4\,\mathrm{km}$ のとき $2GM/(c^2R) = 9\times10^{-4}$ である．これより $(dE/dt)_{GW} = 2.7\times10^{42}\,\mathrm{erg/s}$ を得る．$R = 10^2\,\mathrm{km}$ のときは $2GM/(c^2R) = 9\times10^{-2}$ であり $(dE/dt)_{GW} = 2.7\times10^{52}\,\mathrm{erg/s}$ となる．

(c) 系の（ニュートン的な）エネルギーは $E=-GM^2/R$ で与えられるから，重力波放出によってエネルギーが減少すると軌道半径は小さくなる．よってゆっくりと螺旋を描きながら二つの星は近づいてゆき，最終的には衝突・合体する．合体の時間スケールは

$$\frac{|E|}{(dE/dt)_{GW}} = \frac{5}{64}\left(\frac{Rc^2}{GM}\right)^3\left(\frac{M}{\mu}\right)^2\frac{R}{c},$$

で与えられ，$R = 10^2\,\mathrm{km}$ では約 5 秒である．

第 9 章

9.2 (9.24) 式で定義される関数 $F(1+z)$ は，いまの場合 $F(y) = y\sqrt{\Omega_0 y + (1-\Omega_0)}$ である．よって

$$R(z) = \int_1^{1+z}\frac{dy}{F(y)} = \frac{2}{\sqrt{1-\Omega_0}}\left(\mathrm{arctanh}\sqrt{1-\Omega_0} - \mathrm{arctanh}\frac{\sqrt{1-\Omega_0}}{\sqrt{1+\Omega_0 z}}\right).$$

これを (9.26) 式に代入して整理すると

$$\frac{H_0 d_L}{c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\Omega_0^2}\left[\Omega_0 z - (2-\Omega_0)(\sqrt{1+\Omega_0 z}-1)\right] & (\Omega_0 > 0), \\ \dfrac{z(z+2)}{2} & (\Omega_0 = 0). \end{cases}$$

一方宇宙年齢は

$$H_0 t_0 = \int_1^\infty \frac{dy}{yF(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\Omega_0}\left(1 - \dfrac{\Omega_0}{2\sqrt{1-\Omega_0}}\mathrm{arctanh}\sqrt{1-\Omega_0}\right) & (\Omega_0 \neq 1), \\ \dfrac{2}{3} & (\Omega_0 = 1). \end{cases}$$

ここで本文中の取り決めに従って，$\Omega_0 > 1$ のときは $\sqrt{1-\Omega_0} \to i\sqrt{\Omega_0 - 1}$ と解釈する．この結果から，本文中に指摘したように，$\Lambda = 0$ ならば宇宙年齢は最大でも $\Omega_0 \to 0$ で $H_0 t_0 \to 1$ にしかならないことがわかる．

9.3 宇宙年齢が発散するためには関数 $F(y)$ が $y > 1$ でゼロ点をもつ必要がある．いま Ω_0 を固定して λ_0 をゼロから少しずつ増加させ，最初に $F(y) = 0$ となる点を

$y = y_c$ とおくと明らかに $F(y_c) = F'(y_c) = 0$. よって宇宙論パラメーター間の関係も考慮すると

$$\Omega_0 y_c^3 - k_0 y_c^2 + \lambda_0 = 0, \quad 3\Omega_0 y_c^2 - 2k_0 y_c = 0, \quad \Omega_0 - k_0 + \lambda_0 = 1\,,$$

が成り立つ. 2 番目の式より $y_c = 2k_0/(3\Omega_0)$. これを 1 番目の式に代入して整理すると $\lambda_0 = 4k_0^3/(27\Omega_0^2)$. これらから宇宙年齢が発散するためには $k_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ が必要であることがわかる. さてこの λ_0 を 3 番目の式に代入して整理すると

$$\frac{4}{27}\left(\frac{k_0}{\Omega_0}\right)^3 - \left(\frac{k_0}{\Omega_0}\right) + 1 - \frac{1}{\Omega_0} = 0.$$

あるいは y_c で書き直すと

$$y_c^3 - 3y_c + 2\left(1 - \frac{1}{\Omega_0}\right) = 0.$$

この左辺の式を $f(y_c)$ とおくと, $f(y_c)$ は $y_c = -1$ で極大値 $2(2 - \Omega_0^{-1})$, $y_c = 1$ で極小値 $-2\Omega_0^{-1}$ を取る. よって明らかに $f(y_c) = 0$ は $y_c > 1$ で実解をもつ. すなわち宇宙年齢が発散する宇宙論パラメーターが存在する.

9.4 フリードマン方程式は $(\dot{a}/a)^2 = c^2/a^2$ となり, $a = \pm ct$ が解となるが, $a>0$ とすれば $a = c|t|$. よってこの宇宙の計量は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + c^2t^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2).$$

簡単のため膨張する解 $a = ct$ $(t > 0)$ を考える. ミンコフスキー時空の通常の時間座標を T, 動径座標を R とするとその計量は

$$ds^2 = -c^2dT^2 + dR^2 + R^2d\Omega^2\,.$$

これら二つの計量を比較すると $R = ct\sinh\chi$, $T = t\cosh\chi$ と対応していることがわかる. よって $T^2 - R^2 = c^2t^2 > 0$. これと $a = ct > 0$ よりこの解はミンコフスキー時空の $T = R = 0$ から発する未来向きの光円錐の内部を覆っている. そしてこの宇宙で χ =一定に静止した共動観測者は, $T = R = 0$ を通り, 速度 $dR/dT = c\tanh\chi$ で等速直線運動する観測者に対応している. また, 収縮する解 $a = -ct$ $(t < 0)$ は膨張解の時間反転であり, 過去向きの光円錐の内部を覆う.

参　考　書

一般相対論はその内容や捉え方が非常に多岐にわたっており，本書では触れられなかった重要な話題や宇宙物理学への応用も多い．また内容も初歩的な事項に限ったため，より深く学びたい読者にとっては本書では不十分である．それらに関しては例えば以下に挙げる教科書を参考にしてほしい．

一般相対論の教科書として本書と合わせて読むと理解が深まると思われるのは，

[1] L.D. ランダウ，E.M. リフシッツ（広重徹，恒藤敏彦訳）:『場の古典論』（東京図書，1978).

[2] C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler: *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

[3] B.F. シュッツ（江里口良治，二間瀬敏史訳）:『相対論入門』（上・下 2 巻）(丸善，1988).

[4] 冨田憲二:『相対性理論』（パリティ物理学コース）（丸善，1991).

[1] は独特の物理的センスで相対論を捉えた古典的名著である．[2] は重力を時空の力学として捉えた先駆的かつ代表的教科書であるとともに，一般相対論の主要な話題をほとんど網羅しており「相対論大辞典」ともいうべき役割をしている．[3] は特殊相対論から一般相対論までを詳しく解説したわかりやすい教科書である．[4] は相対論的幾何光学や定常時空解に関して丁寧な解説があり，本書と相補的といえる．

一般相対論をその数学的側面からさらに深く学びたい読者には，

[5] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis: *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[6] R.M.Wald: *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[7] 佐藤文隆，小玉秀雄：『一般相対性理論』（岩波講座現代の物理学）(岩波書店，1992).

[5] は一般相対論に対する数学的アプローチの有効性を世に明らかにした名著で，時空の特異点や大局的因果構造に関する詳しい記述がある．[6] は一般相対論を幾何学的に捉えた代表的な教科書である．[7] には一般相対論における様々な数学的定理が簡潔にまとめられており，研究者にとっても有用な参考書である．

一般相対論の宇宙物理学や宇宙論への応用に興味がある読者には，

[8] S.Weinberg: *Gravitation and Cosmology* (Wiley and Sons, New York, 1972).

[9] 佐藤文隆：『相対論と宇宙論』（サイエンス社，1981).

[10] 成相秀一，冨田憲二：『一般相対論的宇宙論』(裳華房，1989).

[11] 小玉秀雄：『相対論的宇宙論』(丸善，1991).

[12] C.M.Will: *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[8] は宇宙論の教科書としても出色であり，観測的な事項にも踏み込んだ優れた教科書である．[9] は相対論が物理の理論であることを認識させてくれる．[10] には相対論的宇宙モデルや曲がった時空上の場の量子効果に関する詳しい解説がある．[11] では宇宙の熱史や宇宙の大域的構造形成理論が詳しく議論されている．[12] は一般相対論をはじめとする重力理論一般についての検証の方法や実験の現状に関する詳しい記述のある唯一の教科書である．

索　引

あ　行

か　行

さ 行

た 行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

<著者略歴>

佐々木　節（ささき　みさお）

昭和 51 年	京都大学理学部物理学科卒業
昭和 56 年	京都大学大学院博士課程修了
	理学博士
昭和 58 年	京都大学理学部助手
昭和 61 年	広島大学理論物理学研究所助教授
平成 2 年	京都大学基礎物理学研究所助教授
平成 3 年	京都大学理学部助教授
平成 7 年	大阪大学理学部教授
	現在にいたる

物理学教科書シリーズ

一般相対論

平成 8 年 6 月 14 日　初　版

著　者　佐　々　木　　節

企画・編集　ST

発行者　江　面　竹　彦

発行所　産業図書株式会社

東京都千代田区飯田橋 2-11-3

郵便番号　102

電　話　東京 (3261) 7821 (代)

振替口座　00120-7-27724 番

東京書籍印刷・山崎製本

ISBN4-7828-1205-1 C3342

「物理学教科書シリーズ」刊行にあたって

物理学は，われわれが住むこの宇宙で繰り広げられる大自然の営みのすべてがいかなる原理に支配されているかを探る，知的でスリルに満ちた学問分野である．

近年，物理学はめざましい早さで進歩し，その「舞台」は長さや，時間や，エネルギーなどについて何十桁という「広さ」にまで及ぶようになった．

物理学のおもしろさのひとつは，物理の法則はこの広大な舞台のいかなる「地点」においても同じであることにある．しかし法則の普遍性は現象の単純さを意味するものではない．物理学が対象とする現象の多彩さと豊かさはつきることなく，われわれに次から次へと新しい問題を提起し続ける．このように単純かつ複雑な物理学に足を踏み入れようとするのであれば，まさに「先達のあらまほしきかな」である．のぞむらくは，よき教科書とよき指導者をえることである．

本シリーズはこの「単純にして複雑」な現代物理学の相貌を，見通しよく初学者に伝える教科書をめざす．したがって些末な計算技法などは極力省き，多彩な現象と基本原理がどのようにつながっているのかを理解させることに力点を置く．物理学の成果を謳うだけでなく，物理学でまだ何がわかっていないかを知らせることにも意を遣う．物理学がかぎりなく進化を続ける「生きた」学問領域であることを重視する．

このような姿勢がいささかでも物理学の新しい参入者の知的好奇心を刺激し，物理学を学ぶ楽しさを感じとってもらえれば，これを企画したものたちの大きな喜びである．

なお，本シリーズは基礎コース，発展コース，カレントトピックスの3部から構成される．

有馬朗人　相澤洋二
小林俊一
佐藤勝彦
松本　元
矢崎紘一

物理学教科書シリーズ

I　基礎コース (大学 1～3 年)

○力学	羽鳥　尹承
電磁気学	上江洲由晃
熱・統計力学	北原　和夫
○量子力学 I	川村　　清
○量子力学 II	清水　清孝
○連続体力学	川原　琢治
物理数学	塚田　　捷
	大谷　光春

…………………………………………

II　発展コース (大学 3 年～大学院修士課程)

物性物理	家　　泰弘
宇宙物理	大橋　隆哉
素粒子物理	二宮　正夫
原子核物理	大塚　孝治
	今井　憲一
生物物理	
非平衡統計力学	藤坂　博一
○一般相対論	佐々木　節

…………………………………………

III　カレントトピックス

脳とコンピュータ
計算物理
非線形物理
タンパク質の物理　他

○は既刊